Universidade Federal Fluminense

Complementos de Matemática Aplicada

Professora Maria Emilia Neves Cardoso

Notas de Aula / 2º semestre de 2013

Capítulo 1: Limite de uma função real

O conceito de **limite** é o ponto de partida para definir todos os outros conceitos do Cálculo, como os de continuidade, derivada e integral. Nesse capítulo vamos discutir o que são os limites e como podem ser calculados. Também vamos estudar o conceito de continuidade.

1.1 – Noção intuitiva do conceito de limite

Falando de maneira geral, o processo de determinar o limite consiste em investigar o comportamento do valor f(x) de uma função à medida que sua variável independente x se aproxima de um número c, que pode ou não pertencer ao domínio de f.

Vamos supor que queremos saber o que acontece com f(x) = $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ à medida que x se aproxima de 1.

Embora f(x) não seja definida em x = 1, podemos avaliar f(x) para valores de x próximos de 1. Para fazer isto, preparamos uma tabela como a que aparece a seguir:

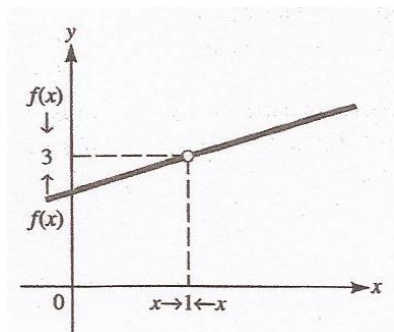
x	0,9	0,95	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,05	1,1
f(x)	2,9	2,95	2,99	2,999	–	3,001	3,01	3,05	3,1

Os valores da função nesta tabela sugerem que:

- f(x) se aproxima do número 3 à medida que x se aproxima de 1 de ambos os lados.

- Podemos obter valores para f(x) tão próximos de 3 quanto quisermos, bastando para isso tomar valores de x suficientemente próximos de 1.

Esse comportamento pode ser descrito, intuitivamente, dizendo que "o limite de f(x) quando x tende a 1 é igual a 3" e abreviado por

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

Geometricamente, a expressão "o limite de f(x) quando x tende a 1 é igual a 3" significa que a altura do gráfico de y = f(x) se aproxima de 3 à medida que x se aproxima de 1.

O gráfico de f(x) = $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ é uma reta com um "buraco" em (1,3), e os pontos (x, y) no gráfico se aproximam desse buraco à medida que x se aproxima de 1 de ambos os lados.

Temos a seguinte definição (informal) de limite:

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo aberto em torno de c, exceto talvez em c. Se o valor de f(x) fica arbitrariamente próximo de L para todos os valores suficientemente próximos de c, dizemos que f tem limite L e escrevemos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Ao definirmos limite, admitimos que f(x) é definida para todos os valores de x nas proximidades de c, mas não necessariamente em x = c. A função não precisa nem existir em x = c, e, mesmo que exista, seu valor f(c) neste ponto pode ser diferente do limite quando x tende a c.

Isso está ilustrado na figura 1 abaixo. Para as três funções representadas, o limite de f(x) quando x tende a c, é igual a L, embora as funções se comportem de forma bastante diferente em x = c. Em (a), f(c) é igual ao limite L; em (b), f(c) é diferente de L, e em (c), f(c) não está definido.

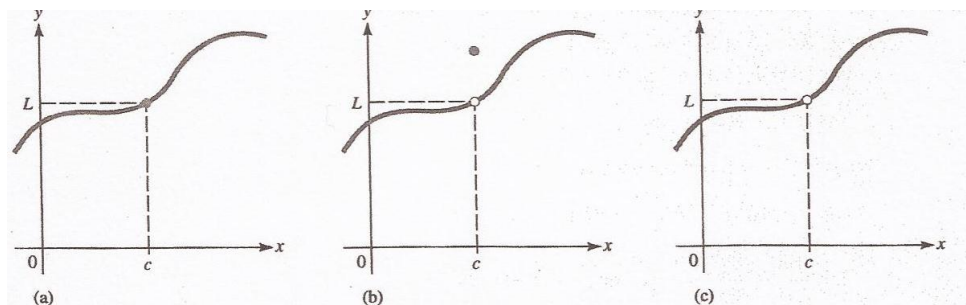



figura 1

A figura 2 abaixo mostra os gráficos de duas funções que não têm limite quando x tende a c. O limite não existe na figura 2(a) porque os "limites laterais" são diferentes, isto é, f(x) se aproxima de 5 quando x tende a c pela direita e se aproxima de 3 (um valor diferente) quando x tende a c pela esquerda. A função da figura 2(b) não tem limite (finito) quando x tende a c porque os valores de f(x) aumentam indefinidamente à medida que x se aproxima de c. Dizemos que funções como a da figura 2(b) têm um "limite infinito" quando x tende a c. Limites laterais e limites infinitos serão estudados mais adiante.

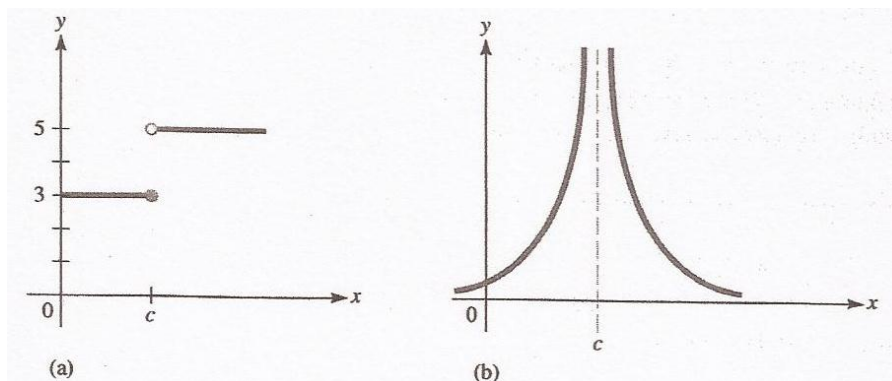



figura 2

1.2 – Propriedades dos limites

Seria muito trabalhoso calcular cada limite por meio de uma tabela, como fizemos na seção anterior. O nosso objetivo agora é introduzir propriedades (teoremas) que permitam simplificar o cálculo dos limites de funções algébricas.

O teorema 1 a seguir, se refere aos limites de duas funções lineares elementares.

Teorema 1: Sejam c e k números reais.

a) $\lim_{x \to c} k = k$

b) $\lim_{x \to c} x = c$

O teorema 2 mostra como calcular limites de funções que são combinações aritméticas de funções cujos limites já conhecemos.

Teorema 2: Se L, M, c e k são números reais e $\lim_{x \to c} f(x) = L$ e $\lim_{x \to c} g(x) = M$ então:

a) $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

b) $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

c) $\lim_{x \to c} (f(x).g(x)) = L.M$

d) $\lim_{x \to c} (k.f(x)) = k.L$

e) $\lim_{x \to c} (f(x))^n = L^n$ onde $n \in Z_+^*$

f) Se $M \neq 0$ então $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

g) $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ onde n é um número natural ímpar ou n é um número natural par e L > 0.

Aplicando os teoremas 1 e 2 podemos determinar facilmente o limite de funções polinomiais e de algumas funções racionais.

Teorema 3: a) Seja p(x) uma função polinomial. Então $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$

b) Seja $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ uma função racional. Se $q(c) \neq 0$ então $\lim_{x \to c} r(x) = r(c)$

Exemplos:

1) $\lim_{x \to 5} 7$

2) $\lim_{x \to 4} x$

3) $\lim_{x \to -3} (x - 5)$

4) $\lim_{x \to 2} (x^3 + 2x + 5)$

5) $\lim_{x \to 4} (3x^2 - 5)$

6) $\lim_{x \to 0} (x^5 - 3x^4 + 2x^2 + 7)$

7) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - 2}{x + 8}$

8) $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3x}$

9) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$

10) $\lim_{x \to -2} \sqrt[4]{x^2 - 4x + 4}$

11) $\lim_{x \to -1} \sqrt[3]{5x - 3}$

12) $\lim_{x \to 5} \sqrt{\dfrac{3x}{x + 4}}$

Teorema 4: Se $\lim_{x \to c} h(x) = L$ e f(x) é uma função tal que f(x) = h(x) para todos os valores de x pertencentes a algum intervalo ao redor de c, excluindo o valor x = c, então $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Queremos calcular, por exemplo, $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

A função f(x) = $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ não está definida para x = 2, pois à medida que x se aproxima de 2, tanto o numerador quanto o denominador se aproximam de zero.

Mas observe que para todos os valores de x tais que $x \neq 2$, temos:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$$

Além disso, sabemos que $\lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$

Logo, pelo teorema 4, podemos concluir que: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

Exemplos:

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4x + 3}$

3) $\lim_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{2x + 4}$

4) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2}{3x + 6}$

5) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x - 2}$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$

7) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt{x}}$

8) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

9) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3}$

10) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 - x}}{2 + x}$

Exercícios – lista 1

Determine os limites:

1) $\lim_{x \to -1} (5 - 3x - x^2)$

2) $\lim_{x \to 3} (5x^2 - 7x - 3)$

3) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x}$

4) $\lim_{x \to 5/2} \frac{4x^2 - 25}{2x - 3}$

5) $\lim_{x \to 2} \frac{2 - x^2}{4x}$

6) $\lim_{x \to 1/2} \frac{x^2 + 1}{1 + \sqrt{2x + 8}}$

7) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 5x}{x + 3}$

8) $\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{\frac{27x^3 + 4x - 4}{x^{10} + 4x^2 + 3x}}$

9) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2 + x}$

10) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$

11) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{8x + 1}{x + 3}}$

12) $\lim_{x \to 8/3} \frac{9x^2 - 64}{3x - 8}$

13) $\lim_{x \to -7} \frac{x^2 - 49}{x + 7}$

14) $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{\frac{x - 4}{6x^2 + 2}}$

15) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}$

16) $\lim_{x \to 0} \frac{(3 + x)^2 - 9}{x}$

17) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

18) $\lim_{x \to 3} \frac{3 - x}{3 - \sqrt{3x}}$

19) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$

20) $\lim_{x \to -1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

21) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 5}$

22) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - x}{x}$

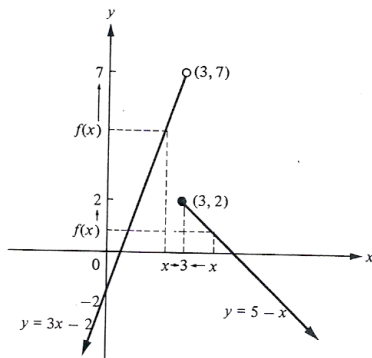
23) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{3x^2 - x^3}$

24) $\lim_{x \to -3} \frac{9 - x^2}{x + 3}$

Respostas:

1) 7	6) 5 / 16	11) 3 /2	16) 6	21) 1 / 5
2) 21	7) 2	12) 16	17) $1 / 2\sqrt{2}$	22) – 1
3) 7 / 8	8) 3 / 2	13) – 14	18) 2	23) 0
4) 0	9) $\sqrt{3} / 3$	14) – 1 /2	19) 4	24) 6
5) – 1 / 4	10) – 1	15) – 2	20) 0	

1.3 – Limites laterais

Quando uma função é definida apenas de um lado de um número c, ou quando uma função se comporta de forma diferente de cada lado de um número c, é mais natural, ao definir o limite, exigir que a variável independente tenda para c apenas do lado que está sendo considerado. Essa situação é ilustrada no seguinte exemplo:

Seja $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{se} \quad x < 3 \\ 5-x & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$

A figura mostra que o valor de f(x) tende a 7 quando x tende a 3 para valores **menores** que 3, isto é, f(x) tende a 7 quando x tende a 3 **pela esquerda**. Denotamos esse fato simbolicamente como

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$$

A figura mostra, também, que o valor de f(x) tende a 2 quando x tende a 3 para valores **maiores** que 3, isto é, f(x) tende a 2 quando x tende a 3 **pela direita**. Simbolicamente temos

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$$

Os limites quando x tende para a pela direita e quando x tende para a pela esquerda são chamados de **limites laterais**.

O teorema a seguir estabelece a relação entre limites laterais e limites.

Teorema: O $\lim_{x \to c} f(x)$ existe e é igual a L se e somente se $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$

No exemplo anterior, como $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$ concluímos que $\lim_{x \to 3} f(x)$ não existe.

Observação: Limites laterais têm todas as propriedades enumeradas na seção 1.2

Exemplos:

1 – Seja $f(x) = \begin{cases} 4x+7 & \text{se} \quad x < -1 \\ x^2+2 & \text{se} \quad x \geq -1 \end{cases}$ Determine, se existir, $\lim_{x \to -1} f(x)$

2 – Seja $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se} \quad x < 2 \\ 2 & \text{se} \quad x = 2 \\ 9-x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$ Determine, se existir, $\lim_{x \to 2} f(x)$

3 – Seja $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ 3x-7 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$ Determine, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim_{x \to 3} f(x)$ c) $\lim_{x \to 5} f(x)$

1.4 – Continuidade

Na linguagem comum, um processo “contínuo” é aquele que ocorre sem interrupções ou mudanças repentinas. Intuitivamente, dizemos que uma função é **contínua** se podemos desenhar o seu gráfico sem interrupções ou “sem tirar o lápis do papel”. Formalmente, a definição de continuidade é expressa utilizando a noção de limite da seguinte maneira:

Definição: Uma função f é **contínua em um número c** se:

a) f(c) é definida
b) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe
c) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Exemplo 1: Verifique se as funções abaixo são contínuas em x = – 2

$f(x) = x^3 - 2x + 1$

$g(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

$$h(x) = \begin{cases} x+7 & \text{se} \quad x < -2 \\ 5 & \text{se} \quad x = -2 \\ 3-x & \text{se} \quad x > -2 \end{cases}$$

Vimos na seção 1.2 que, se p(x) e q(x) são funções polinomiais, então,

$$\lim_{x\to c} p(x) = p(c) \ \text{e} \ \lim_{x\to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} \ \text{se} \ q(c) \neq 0$$

De acordo com esses resultados e pela definição de continuidade, temos:

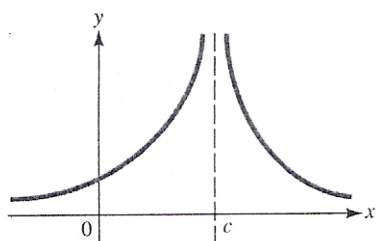
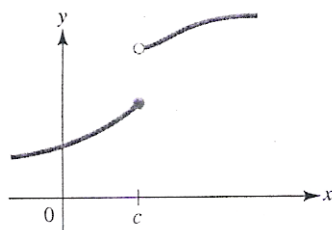
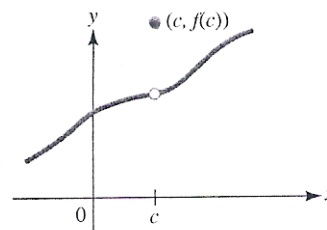
Teorema 1: Uma função polinomial é contínua em todos os números reais.

Teorema 2: Uma função racional é contínua em todos os números nos quais é definida.

Exemplo 2: $f(x) = 3x^2 - x + 5$ é contínua em IR

Exemplo 3: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ é contínua em IR – {2}

Observação: Se uma função não é contínua em um número c, dizemos também que f é **descontínua** em c.

Apresentamos abaixo os gráficos de três funções descontínuas em c.

f(c) não é definida $\qquad$ $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ não existe $\qquad$ $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

Exemplo 4: Verifique se f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$ é contínua em x = 2

Exemplo 5: Verifique se f(x) = $\begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x < 4 \\ 15 & \text{se} \quad x = 4 \\ 3x + 3 & \text{se} \quad x > 4 \end{cases}$ é contínua em x = 4.

Exemplo 6: Verifique se f(x) = $\begin{cases} \sqrt{x + 4} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x - 2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$ é contínua em x = 0

Exemplo 7: Seja f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ a & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$

Determine o valor de a para que f seja contínua em todos os números reais.

Exercícios – lista 2

Nas questões de 1 a 4, calcule os limites:

1) $\lim_{x \to 2^+} (x^3 - 2x + 5)$

2) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$

3) $\lim_{x \to -3^+} \frac{x^2 - 9}{3 - x}$

4) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

Nas questões de 5 a 12, verifique se as funções são contínuas nos valores dados:

5) $f(x) = \begin{cases} 5 + x & \text{se} \quad x \le 3 \\ 9 - x & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$ em x = 3

6) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$ em x = 0

7) $f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{se} \quad x \le 1 \\ 3 - x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$ em x = 1

8) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{se} \quad x \ge 1 \end{cases}$ em x = 1

9) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se} \quad x > 1 \\ x^2 & \text{se} \quad x \le 1 \end{cases}$ em x = 1

10) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{se} \quad x \ne -1 \\ -4 & \text{se} \quad x = -1 \end{cases}$ em x = –1

11) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{se} \quad x \ne 3 \\ 2 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ em x = 3

12) $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2 & \text{se} \quad x < -2 \\ 0 & \text{se} \quad x = -2 \\ 11 - x^2 & \text{se} \quad x > -2 \end{cases}$ em x = – 2

Nas questões de 13 a 16, determine o valor de a para que f(x) seja contínua no valor indicado.

13) $f(x) = \begin{cases} \frac{9 - x^2}{3x + 9} & \text{se} \quad x \ne -3 \\ a & \text{se} \quad x = -3 \end{cases}$ em x = – 3

14) $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{se} \quad x \ge 1 \end{cases}$ em x = 1

15) $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 36}{5x - 15} & \text{se} \quad x \ne 3 \\ a & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ em x = 3

16) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{se} \quad x \ne -2 \\ a\,x + 10 & \text{se} \quad x = -2 \end{cases}$ em x = – 2

Respostas:

1) 9	2) 0	3) 0	4) 4	5) não	6) não
7) não	8) sim	9) sim	10) sim	11) não	12) não
13) 2	14) – 3	15) 7	16) 24 / 5		

1.5 – Limites que envolvem infinito

1.5.1 – Limites infinitos

Na seção 1.1 calculamos o limite L dos valores f(x) de uma função quando x tende para um número real c, isto é, $\lim_{x \to c} f(x) = L$ onde L é um número real. Pode ocorrer que, à medida que x se aproxime de um número c, os valores de f(x) tornem-se muito grandes (em valor absoluto). Esse fato pode ser ilustrado pelos seguintes exemplos:

Seja $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

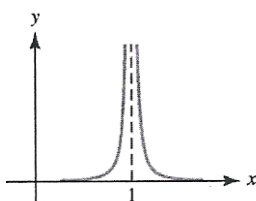
Essa função não é definida para x = 1, mas podemos analisar o comportamento dos valores de f(x) quando x está à esquerda ou à direita desse número. Para x próximo de 1, o denominador é muito pequeno, o que significa que o quociente é muito grande. A tabela abaixo mostra o aumento de f(x) à medida que x se aproxima de 1.

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
f(x)	100	10.000	1.000.000	–	1.000.000	10.000	100

Observamos que quando x se aproxima de 1 pela esquerda ou pela direita, os valores de f(x) aumentam. Se admitirmos que esses valores possam crescer ilimitadamente, diremos que:

— o limite de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ quando x tende a 1 pela esquerda é mais infinito e indicaremos por

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

— o limite de $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ quando x tende a 1 pela direita é mais infinito e indicaremos por

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Apresentamos ao lado um esboço do gráfico de f.

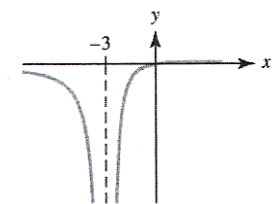
Como a função tem o mesmo comportamento à direita e à esquerda de 1 concluímos que $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

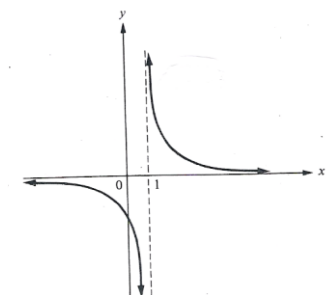
Podemos indicar de forma análoga, o comportamento de uma função cujos valores decrescem ilimitadamente.

Vamos considerar a função $g(x) = \dfrac{x}{(x+3)^2}$

A tabela a seguir mostra os valores de g(x) para alguns valores de x na vizinhança de – 3.

x	– 3,1	– 3,01	– 3,001	– 3	– 2,999	– 2,99	– 2,9
g(x)	– 310	– 30.100	– 3.001.000	–	– 2.999.000	– 29.900	– 290

Vemos que os valores de g(x) são negativos e muito grandes em valor absoluto para valores de x próximos de – 3, isto é, os valores de g(x) decrescem ilimitadamente à medida que x se aproxima de – 3 pela esquerda ou pela direita. O gráfico de g aparece abaixo.

Escrevemos, nesse caso, que $\lim_{x \to -3^-} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -3^+} g(x) = -\infty$

Como os limites laterais são iguais podemos afirmar que $\lim_{x \to -3} g(x) = -\infty$

Seja $h(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Pelo gráfico de h ao lado, vemos que à medida que x se aproxima de 1 pela esquerda, os valores de h(x) decrescem ilimitadamente, isto é, $\lim_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$

Vemos, também, que quando x se aproxima de 1 pela direita, os valores de h(x) crescem ilimitadamente, ou seja, $\lim_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$

Como a função tem comportamento distinto à esquerda e à direita de 1, concluímos que não existe limite de h(x) quando x tende para 1.

O seguinte teorema estabelece o cálculo de limites infinitos:

Teorema: Se $\lim_{x \to c^+} f(x) = L,\ L \neq 0$ e $\lim_{x \to c^+} g(x) = 0$ então $\lim_{x \to c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, com o sinal dependendo dos sinais de L e de g(x) à direita de c.

Observação: O teorema anterior pode ser enunciado para o limite à esquerda de c com as mesmas conclusões. A existência do limite em c depende da igualdade dos limites laterais.

Exemplos: 1) $\lim_{x \to 5^+} \dfrac{9-x}{x-5}$ 2) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{-3x}{x-2}$

3) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x^2+x}$ 4) $\lim_{x \to -2^+} \dfrac{1-x}{x+2}$

5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{5}{x^3-x^2}$ 6) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x-2}{x+1}$

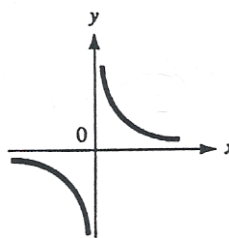
1.5.2 – Limites no infinito

Estamos interessados, agora, em conhecer o comportamento dos valores f(x) de uma função quando x cresce ou decresce ilimitadamente.

Vamos calcular alguns valores de $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x cresce ilimitadamente.

x	10	100	1000	10000	100000
f(x)	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001

Observamos que, à medida que x cresce ilimitadamente, os valores de f(x) se aproximam de zero, isto é, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ está esboçado ao lado.

De modo geral, temos:

Teorema 1: Se n é um número inteiro positivo e c é um número real então

$$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

Para o cálculo de limites no infinito, de funções polinomiais e de funções racionais, temos os seguintes teoremas:

Teorema 2: Seja $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

$$\text{Então } \lim_{x \to \infty} P(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

Teorema 3: Sejam $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ e $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$

$$\text{Então } \lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemplos:

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^4} =$

2) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2}{3x^5} =$

3) $\lim_{x \to \infty} (x^3 - 3x^2 + x - 7) =$

4) $\lim_{x \to -\infty} (1 - x^2 + x^3 + 3x^4 - 2x^7) =$

5) $\lim_{x \to -\infty} (2x^5 + x^2 - 4) =$

6) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x - 5}{7x + 8} =$

7) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2} =$

8) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x + 5}{2 + 4x - x^2} =$

9) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3 - 2x + x^2 - 4x^3}{x^3 + 5x^2 + 4} =$

10) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5}{8 - 5x - x^2} =$

Exercícios - lista 3

Determine os limites:

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{x-2}$

3) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{4+3x^2}}{5x}$

4) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

5) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

6) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{2-x}$

7) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{1-x}{(x-5)^2}$

8) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3+x}{(x-1)^2}$

9) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$

10) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+1}{x+2}$

11) $\lim\limits_{x \to -7^+} \dfrac{x-7}{x+7}$

12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{x^2}$

14) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{2x+2}$

15) $\lim\limits_{x \to -8^-} \dfrac{3x}{(x+8)^2}$

16) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5}{x-4}$

Respostas:

1) $+\infty$

2) $-\infty$

3) $+\infty$

4) $-\infty$

5) $+\infty$

6) $-\infty$

7) $-\infty$

8) $+\infty$

9) $+\infty$

10) não existe

11) $-\infty$

12) não existe

13) $-\infty$

14) $-\infty$

15) $-\infty$

16) não existe

Exercícios – lista 4

Determine os limites:

1) $\lim_{x \to \infty} (2x^4 - 7x + 1)$

2) $\lim_{x \to -\infty} (2 + 5x - x^2 + 4x^3)$

3) $\lim_{x \to \infty} (6x - 10x^2)$

4) $\lim_{x \to -\infty} (-x^5 + x^3 + 9)$

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^5}$

6) $\lim_{x \to \infty} \frac{3}{-10x^2}$

7) $\lim_{x \to \infty} \frac{-7}{2x^2}$

8) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x+4}$

9) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + x^2 + 4}{-x^2 - 2x + 7}$

10) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x^3 + 1}$

11) $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x^4 - 1}{-5x^3}$

12) $\lim_{x \to \infty} \frac{1 + x^2}{1 - 2x}$

13) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5 + x - 7x^2}{x^3 + 2x - 1}$

14) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x + 1}{4 - x}$

15) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 3}{6x + 7}$

16) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2 + 3x - x^3}{5}$

Respostas:

1) ∞

2) $-\infty$

3) $-\infty$

4) ∞

5) 0

6) 0

7) 0

8) 1

9) $-\infty$

10) 0

11) ∞

12) $-\infty$

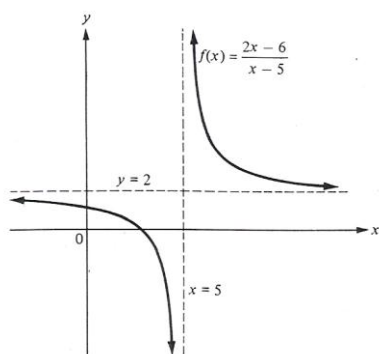
13) 0

14) -4

15) $1/3$

16) ∞

1.6 – Assíntota vertical e assíntota horizontal

Os limites envolvendo infinito que estudamos na seção anterior são úteis no traçado de gráficos porque podem ser usados para a localização das **assíntotas.**

Seja f(x) = $\frac{2x-6}{x-5}$ cujo gráfico está esboçado ao lado.

Observe que a função não está definida em x = 5 e que os valores de f(x) são muito grandes (em valores absolutos) quando x está próximo de 5. Quando o gráfico de uma função se aproxima de uma reta vertical da forma como o gráfico de f se aproxima da reta x = 5, aumentando ou diminuindo ilimitadamente, a reta é chamada de **assíntota vertical** do gráfico de f.

Observe também, que o gráfico de f se aproxima da reta y = 2 quando x se torna muito grande (em valor absoluto). Quando o gráfico de uma função se aproxima de uma reta horizontal da forma como o gráfico de f(x) se aproxima da reta y = 2 quando x aumenta ou diminui ilimitadamente, a reta é chamada de **assíntota horizontal** do gráfico de f.

De modo geral, temos as seguintes definições:

Definição 1: A reta x = a é chamada de **assíntota vertical** do gráfico de uma função f se pelo menos uma das seguintes condições é verdadeira:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \; ; \; \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \; ; \; \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \; ; \; \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

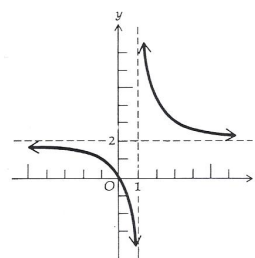
Definição 2: A reta y = b é chamada de **assíntota horizontal** do gráfico de uma função f se pelo menos uma das seguintes condições é verdadeira:

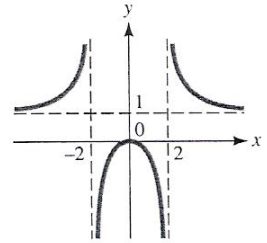
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \; ; \; \lim_{x\to \infty} f(x) = b$$

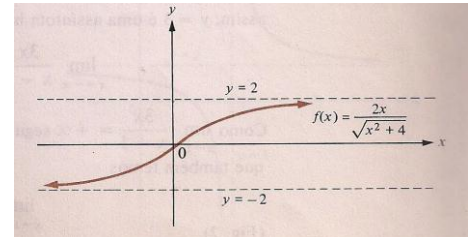
Observação: Para localizar as possíveis assíntotas verticais do gráfico de uma função racional f tal que f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$ devemos procurar valores tais que q(a) = 0 e p(a) ≠ 0. Para achar as assíntotas horizontais devemos calcular os limites de f quando x tende a ∞ e quando x tende a – ∞. Se algum desses limites existe (é finito), então o valor do limite determina a assíntota horizontal.

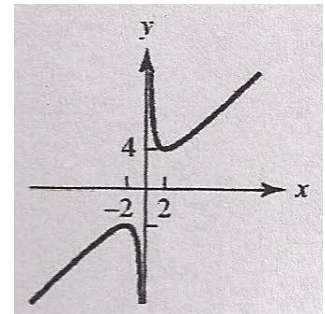
Exemplos:

1) f(x) = $\frac{2x}{x-1}$

x = 1 é assíntota vertical e y = 2 é assíntota horizontal

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

x = 2 e x = – 2 são assíntotas verticais e y = 1 é assíntota horizontal

3) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Não existem assíntotas verticais e y = 2 e y = – 2 são assíntotas horizontais

4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

x = 0 é assíntota vertical e não existem assíntotas horizontais

Exercícios – lista 5

Nas questões abaixo, determine se existirem, as equações das assíntotas verticais e das assíntotas horizontais das funções dadas.

1) f(x) = $\frac{4x-1}{x+2}$

2) f(x) = $\frac{x^2+2}{x^2-1}$

3) f(x) = $\frac{x}{(x+1)^2}$

4) f(x) = $\frac{3x^2}{x^2+2x-15}$

5) f(x) = $\frac{x^2-9}{x^2+3x}$

6) f(x) = $\frac{2x^2}{x^2+2}$

7) f(x) = $\frac{x^3}{x-2}$

8) f(x) = $\frac{x^3}{x^2+2}$

Respostas:

1) x = – 2 é assíntota vertical e y = 4 é assíntota horizontal

2) x = – 1 e x = 1 são assíntotas verticais e y = 1 é assíntota horizontal

3) x = – 1 é assíntota vertical e y = 0 é assíntota horizontal

4) x = – 5 e x = 3 são assíntotas verticais e y = 3 é assíntota horizontal

5) x = 0 é assíntota vertical e y = 1 é assíntota horizontal

6) Não existem assíntotas verticais e y = 2 é assíntota horizontal

7) x = 2 é assíntota vertical e não existem assíntotas horizontais

8) Não existem assíntotas

Exercícios de revisão de limites – lista 6

Determine os limites abaixo:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-2x}$

2) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{1}{x+3}$

5) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-3x}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+6x}{-2+x}$

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2+x+1}{-4x^2+5x+9}$

8) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x^2-5x-35}}{8-x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$

11) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-5x^2}{3x}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5}{x^3-x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-1}{x^2-2x}$

14) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-3}{x^2-1}$

15) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+5x-7}{x^2-4x+6}$

16) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^{100}-x^{99}}{x^{101}-x^{100}}$

17) $\lim\limits_{x\to 1/2} 2x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x}$

19) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

20) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$

21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{4x}$

22) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-5x+3}{x^2-3x+2}$

23) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-4}$

24) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

25) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2-8x}{2x}$

Respostas:

1) 1	6) 6	11) + ∞	16) 0	21) 1 / 4
2) 1 / 6	7) – 1 / 2	12) – ∞	17) 9	22) +∞
3) + ∞	8) – 1	13) – ∞	18) 1	23) 6
4) – ∞	9) 1 / 4	14) 3 / 2	19) – ∞	24) – ∞
5) + ∞	10) 64	15) 7 / 2	20) – 2	25) – 4

Capítulo 2 – Derivada de uma Função Real

Vamos iniciar esse capítulo considerando dois problemas aplicados: o primeiro consiste em determinar o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função e o segundo em definir a velocidade de um objeto em movimento retilíneo. Essas duas aplicações, aparentemente tão diversas, vão conduzir ao mesmo conceito: o de **derivada**. Mais adiante, abandonaremos os aspectos físico e geométrico dos dois problemas e definiremos a derivada como o limite de uma função. Isso vai permitir aplicar o conceito de derivada a qualquer quantidade ou grandeza que possa ser representada por uma função.

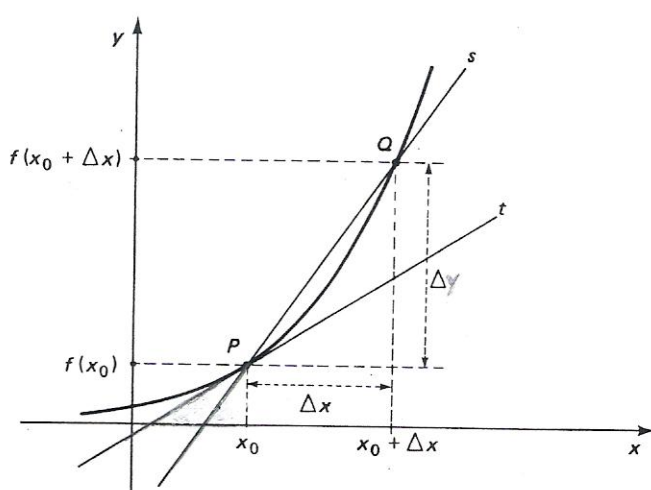
2.1 – Coeficiente Angular da Reta Tangente ao Gráfico de uma Função

Vamos supor que P é um ponto no gráfico de uma função f e queremos determinar a reta t tangente ao gráfico de f em P. Sabemos que uma reta no plano é determinada quando conhecemos seu coeficiente angular e um ponto pertencente a ela. Precisamos calcular, então, o coeficiente angular de t. A ideia para obter esse coeficiente angular é aproximar a reta tangente por retas secantes.

Vamos escolher outro ponto Q no gráfico de f e traçar uma reta (secante) passando por P e Q. Tomando Q bem próximo de P, podemos fazer com que o coeficiente angular da reta secante se aproxime do coeficiente angular da reta tangente com qualquer precisão desejada.

Vamos supor que $P = (x_0, f(x_0))$ e que a abscissa de Q esteja a Δx unidades de x_0. Desse modo, a abscissa de Q é $x_0 + \Delta x$. Como Q pertence ao gráfico de f, a ordenada de Q é $f(x_0 + \Delta x)$. Assim, $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

O coeficiente angular da reta secante s é:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Se fizermos Δx tender a zero, o ponto Q se moverá sobre a curva $y = f(x)$ e tenderá ao ponto P. Além disso, a reta secante s irá girar em torno de P e tenderá para a reta tangente t. Logo, quando Δx tende a zero, o coeficiente angular de s tende para o coeficiente angular de t, ou seja,

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Essas considerações levam para a seguinte definição:

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo contendo x_0 e seja $y_0 = f(x_0)$.
Se o limite

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existe (é finito), dizemos que a reta no plano xy contendo o ponto (x_0, y_0) e tendo coeficiente angular m é a **reta tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0)**.

Exemplo: Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + 4x$ no ponto (1,5).

Observação: Se f é contínua em x_0 e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm \infty$ dizemos que a reta vertical $x = x_0$ é a reta tangente ao gráfico de f em (x_0, y_0).

2.2 – Taxa de Variação

Vamos considerar a seguinte situação: um carro está se movendo ao longo de uma estrada reta e d(t) representa a sua distância do ponto de partida após t horas e queremos determinar a velocidade do carro num instante t_1.

Para definir essa velocidade, primeiro calculamos a velocidade média em um intervalo de tempo próximo de t_1. Consideramos, por exemplo, os instantes t_1 e $t_1 + \Delta t$ onde Δt é um número real. As posições correspondentes são $d(t_1)$ e $d(t_1 + \Delta t)$. A velocidade média (v_m) do carro entre os instantes t_1 e $t_1 + \Delta t$ é:

$$v_m = \frac{\text{variação da distância}}{\text{variação do tempo}} = \frac{d(t_1 + \Delta t) - d(t_1)}{t_1 + \Delta t - t_1} = \frac{d(t_1 + \Delta t) - d(t_1)}{\Delta t}$$

Para obtermos a velocidade do carro no instante t_1 (ou a velocidade instantânea em t_1), calculamos a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores. Se o intervalo de tempo Δt é pequeno, a velocidade média se aproxima da velocidade instantânea. Podemos então definir a velocidade no instante t_1 ou a **taxa de variação (instantânea)** da distância em relação ao tempo como o limite quando Δt tender a zero na expressão para a velocidade média, isto é:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{d(t_1 + \Delta t) - d(t_1)}{\Delta t}$$

Exemplo: No instante t = 0 um corpo inicia um movimento em linha reta e sua posição no instante t é dada por $d(t) = t^3 + 5$. Determine a velocidade no instante t = 3.

As considerações a respeito da taxa de variação da distância em relação ao tempo podem ser generalizadas e assim serem aplicadas para quaisquer quantidades variáveis de qualquer espécie.

Definição: Seja y = f(x). A **taxa de variação (instantânea) de y em relação a x** quando x tem o valor x_1 é dada por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Exemplo: Suponha que o custo semanal, em reais, para a fabricação de x geladeiras seja dado pela função $C(x) = 8.000 + 400x - 0,2x^2$ com $0 \le x \le 400$. Determine a taxa de variação da função custo em relação a x quando x = 250.

Solução: Seja $C'(x)$ a taxa de variação de C em relação a x. Queremos determinar $C'(250)$.

$$C'(250) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(250+\Delta x) - C(250)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8.000 + 400(250+\Delta x) - 0,2(250+\Delta x)^2 - 95.500}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{8.000 + 100.000 + 400\Delta x - 12.500 - 100\Delta x - 0,2\Delta^2 x - 95.500}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{300\Delta x - 0,2\Delta^2 x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(300 - 0,2\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (300 - 0,2\Delta x) = 300$$

Resposta: Para um nível de fabricação 250 geladeiras, a taxa de variação do custo é R$300,00 por geladeira.

2.3 – A Derivada de uma Função

Vimos nas seções 1 e 2 que o problema de determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado e o problema de encontrar a taxa de variação de uma variável em relação à outra são ambos resolvidos pelo cálculo do mesmo limite, que é a base de um dos conceitos fundamentais do Cálculo, a **derivada**, definida a seguir.

Definição: Dada uma função f(x), a função definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ é chamada de (função) **derivada** de f(x)

Observações:

1 – O limite indicado na definição de derivada pode existir para alguns valores de x e deixar de existir para outros. Se o limite existe (é finito) para x = a, dizemos que a função é **derivável** (diferenciável) **em a**.

2 – A notação f' usada na definição anterior tem a vantagem de enfatizar que a derivada de f é uma função de x que está associada de certa maneira com a função f dada. Se a função é apresentada na forma y = f(x), com a variável dependente explícita, então o símbolo y' é usado em lugar de $f'(x)$. A derivada de y = f(x) é também indicada por $\frac{dy}{dx}$ e algumas vezes por $D_x y$.

Interpretação Geométrica: A derivada $f'(x)$ expressa o coeficiente angular da reta tangente à curva y = f(x) em função da coordenada x do ponto de tangência (desde que o limite exista).

Taxa de Variação: A derivada $f'(x)$ expressa a taxa de variação (instantânea) de y = f(x) em relação a x.

A operação de encontrar a derivada de uma função é chamada **derivação** ou **diferenciação** e pode ser efetuada aplicando-se a definição de derivada. No entanto, como esse processo é usualmente demorado, precisamos de algumas regras (teoremas que são provados a partir da definição de derivada) que possibilitem encontrar a derivada de certas funções mais facilmente.

2.4 – Regras básicas de derivação

Sendo $c \in IR$, $n \in Q$ e u e v funções reais de variável x.

1) Regra da constante: Se $f(x) = c$ então $f'(x) = 0$

2) Regra da identidade: Se $f(x) = x$ então $f'(x) = 1$

3) Regra da potência: Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = n.x^{n-1}$

4) Regra da soma: Se $f(x) = u + v$ então $f'(x) = u' + v'$

5) Regra do produto: Se $f(x) = uv$ então $f'(x) = u'v + uv'$

6) Regra do produto por uma constante: Se $f(x) = c.u$ então $f'(x) = c.u'$

7) Regras do quociente: a) Se $f(x) = \frac{u}{v}$ e $v \neq 0$ então $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

b) Se $f(x) = \frac{c}{v}$ e $v \neq 0$ então $f'(x) = \frac{-cv'}{v^2}$

Exemplos:

1) $f(x) = x^3 + 4x + 7$

2) $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x$

3) $f(x) = 2x^5 + 3x^{-10} - 9x^{-2} - x + 8$

4) $f(x) = 3x + 4\sqrt{x}$

5) $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 5x)$

6) $f(x) = (4x^2 + 2)(7x^3 + x)$

7) $f(x) = \frac{2}{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

9) $f(x) = \frac{7}{5x^3}$

10) $f(x) = \frac{5x+7}{2x-1}$

11) $f(x) = \frac{3x^2-2}{x}$

12) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+7}$

13) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + 4x$ no ponto (1, 5).

14) Suponha que o custo semanal, em reais, para a fabricação de x geladeiras seja dado pela função $C(x) = 8.000 + 400x - 0,2x^2$ com $0 \leq x \leq 400$. Determine a taxa de variação da função custo em relação a x quando x = 250.

15) Estima-se que o produto interno bruto (PIB) de um país daqui a x anos seja (em bilhões de dólares) de $f(x) = x^2 + 2x + 50$ para $0 \leq x \leq 5$. Determine a taxa na qual o PIB estará variando daqui a 4 anos.

16) Um empresário estima que quando x unidades de certo produto são fabricadas e vendidas, a receita em milhares de reais associada ao produto é dada por $R(x) = 0,5x^2 + 3x - 2$. Qual é a taxa de variação da receita em relação ao nível de produção x quando são fabricadas 3 unidades?

17) Um fabricante observa que quando produz e vende x pacotes de biscoito, o lucro (em reais) é dado por $L(x) = 50x - 0,1x^2 - 10$ para $0 \leq x \leq 250$. Determine a taxa de variação do lucro em relação a x para um nível de produção de 200 pacotes.

Em Economia, o termo “marginal” é frequentemente usado como um sinônimo de “derivada de”. Por exemplo, se C é a função custo tal que C(x) é o custo da produção de x unidades de uma mercadoria, $C'(x)$ é chamado de **custo marginal** da produção de x unidades e C' de **função custo marginal**. Desse modo, o custo marginal é a taxa de variação do custo da produção em relação ao número de unidades produzidas.

18) Seja $C(x) = 110 + 4x + 0,02x^2$ o custo de produção de x brinquedos. Determine o custo marginal quando x = 50.

19) O custo diário de fabricação (em reais) de x centenas de unidades de um produto é dado por $C(x) = \frac{4x^2}{3} + 40x + 57$. Determine o custo marginal para um nível de produção diário de 300 unidades.

20) Se $C(x) = 900 - 225x$ e $R(x) = -x^3 + 15x^2$ são, respectivamente, as funções custo e receita para x unidades de um produto fabricado e vendido por uma empresa, determine o lucro marginal com a produção e venda de 10 unidades.

Exercícios - lista 7

Nos itens 1 a 14, ache as derivadas aplicando as regras básicas:

1) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 1$

2) $f(x) = 5x^6 - 9x^4$

3) $f(x) = x^8 - 2x^7 + 3x + 1$

4) $f(x) = 5x^{-5} - 25x^{-1}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

6) $f(x) = \dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{4}{5x}$

7) $f(x) = x^2 (3x^3 - 1)$

8) $f(x) = (x^2 + 1)(2x^3 + 5)$

9) $f(x) = (x^3 - 1)(3x^2 - x)$

10) $f(x) = -3(5x^3 - 2x + 5)$

11) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{2}$

12) $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

13) $f(x) = \dfrac{2x + 7}{3x - 1}$

14) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{x^2 - 1}$

Nos itens de 15 a 18, calcule $f'(4)$:

15) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 1$

16) $f(x) = \dfrac{4x}{x - 2}$

17) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

18) $f(x) = (x^2 + 1)(1 - x)$

Nos itens de 19 e 20, determine a taxa de variação de f(x) em relação a x para o valor especificado.

19) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; $x = 2$

20) $f(x) = x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2}$; $x = 1$

21) O custo de produção de x unidades de uma mercadoria é dado por $C(x) = 40 + 3x + 16\sqrt{x}$ reais. Ache o custo marginal quando são produzidas 64 unidades.

22) Sabe-se que 60 – x unidades de um produto são vendidas quando o preço é x reais por unidade. Determine a taxa de variação da receita em relação ao preço unitário quando x = 10.

23) Um fabricante observa que quando produz e vende x caixas de chocolate por semana, o lucro (em reais) é dado por $L(x) = 0{,}02x^2 + 15x - 1.000$. Qual é o lucro marginal para um nível de produção de 100 caixas por semana?

24) Sabe-se que a receita obtida com a venda de x unidades de um produto é dada pela função $R(x) = 220x - 4x^2$ e que o custo de produção é dado por $C(x) = 900 + 44x$. Para que nível de produção x a receita marginal é igual ao custo marginal?

25) Um fabricante estima que o custo de produção de x unidades de um produto é dado, em reais, pela função $C(x) = 0{,}2x^2 + \frac{100}{x} + 50x + 100$. Determine o custo marginal quando $x = 5$.

26) Calcula-se que daqui a x meses a população de certa cidade será $P(x) = 2x + 4\sqrt{x^3} + 5.000$ pessoas. Determine a taxa de variação da população em relação ao tempo daqui a 9 meses.

27) Estima-se que daqui a x meses a população de certo município será de $P(x) = x^2 + 20x + 8.000$ habitantes. Qual será a taxa de variação da população com o tempo daqui a 15 meses?

28) Estima-se que daqui a t anos a circulação de um jornal será de $C(t) = 100t^2 + 400t + 5.000$. Determine a taxa de variação da circulação com o tempo daqui a 5 anos. Nessa ocasião a circulação estará aumentando ou diminuindo?

29) Os registros mostram que x anos depois de 1994, o imposto predial médio que incidia sobre um apartamento de três quartos em certo município era $T(x) = 20x^2 + 40x + 600$ reais. Qual era a taxa de aumento do imposto no início do ano 2.000?

30) A receita, em milhares de reais, de uma pequena empresa era $R(t) = 0{,}1t^2 + 10t + 20$, t anos após a sua fundação no ano de 2.001. Qual a taxa de variação da receita em 2.005?

31) Um empresário estima que quando produz e vende x unidades de um produto, o lucro em reais é dado por $L(x) = -0{,}5x^2 + 22x - 98$. Determine o lucro marginal para um nível de produção e venda de 12 unidades.

32) Calcula-se que daqui a t anos a população de certo município será de $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ milhares de pessoas.

a) Determine a taxa de aumento da população daqui a um ano.
b) Determine a taxa de aumento da população daqui a 9 anos.
c) O que acontecerá com a taxa de aumento da população a longo prazo?

Respostas:

1) $5x^4 - 9x^2$

2) $30x^5 - 36x^3$

3) $8x^7 - 14x^6 + 3$

4) $-25x^{-6} + 25x^{-2}$

5) $\frac{4\sqrt[3]{x}}{3}$

6) $\frac{3}{2}x - \frac{4}{5}x^{-2}$

7) $15x^4 - 2x$

8) $10x^4 + 6x^2 + 10x$

9) $15x^4 - 4x^3 - 6x + 1$

10) $-45x^2 + 6$

11) $2x^3$

12) $\frac{1}{(2-x)^2}$

13) $\frac{-23}{(3x-1)^2}$

14) $\frac{-20x}{(x^2-1)^2}$

15) 16

16) – 2

17) – 1/4

18) – 41

19) 9

20) – 3/2

21) R$ 4,00 por unidade

22) R$ 40,00 por unidade

23) R$ 19,00 por caixa

24) x = 22

25) R$ 48,00 por unidade

26) 20 pessoas por mês

27) 50 habitantes por mês

28) 1.400 exemplares por ano; aumentando

29) R$ 280,00 por ano

30) R$ 10.800,00 por ano

31) R$ 10,00 por unidade

32) a) 1.500 pessoas por ano; b) 60 pessoas por ano
c) Tenderá a zero

2.5 – Regra da Cadeia e Regra geral da potência

Queremos determinar, por exemplo, a derivada de $y = (x^2 + 5x)^3$

Podemos fazer isso desenvolvendo $(x^2 + 5x)^3$ e derivando o polinômio resultante.

Assim, $y = (x^2 + 5x)^3 = x^6 + 15x^5 + 75x^4 + 125x^3$

Logo $\frac{dy}{dx} = 6x^5 + 75x^4 + 300x^3 + 375x^2$ (1)

Outro método é fazermos $u = x^2 + 5x$ de modo que $y = u^3$

Então $\frac{dy}{du} = 3u^2$ e $\frac{du}{dx} = 2x + 5$ (2)

É importante observar que $\frac{dy}{du}$ é a derivada em relação a u quando y é considerado como função de u e que $\frac{dy}{dx}$ é a derivada em relação a x quando y é considerado como função de x.

Se considerarmos o produto $\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ e tratarmos as derivadas como quocientes, então o produto sugere a seguinte regra:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Daí e por (2), $\frac{dy}{dx} = 3u^2(2x + 5) = 3(x^2 + 5x)^2(2x + 5)$

Note que este resultado é equivalente a (1)

Regra da cadeia (versão informal): Se y é uma função derivável em u e u é uma função derivável em x, então y é uma função derivável em x e $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

No exemplo apresentado acima, a função dada é uma potência da função $f(x) = x^2 + 5x$. Como as potências de funções ocorrem com frequência no Cálculo, é conveniente estabelecer uma regra de derivação que possa ser aplicada nesses casos. Utilizando a regra da cadeia podemos provar o importante resultado enunciado a seguir.

Teorema (regra geral da potência): Se r é um número racional e u é uma função derivável de variável x então

$$(u^r)' = r.u^{r-1}.\,u'$$

Exemplos:

1) $y = (x^2 + 3x - 2)^9$

2) $y = (3x^3 + 5x^2 - 4)^{-5}$

3) $y = \sqrt{6x - 1}$

4) $y = 4x^2(2x - 1)^4$

5) $y = \left(\dfrac{x - 2}{x + 1}\right)^{10}$

Exercícios - lista 8

Nas questões 1 a 14, calcule as derivadas:

1) $y = (5 - 2x)^{10}$

2) $y = (4x + 1)^{-5}$

3) $y = (2x^4 - x + 1)^{-4}$

4) $y = (x^2 - 3x + 2)^7$

5) $y = 5x^2.(2x + 3)^4$

6) $y = 6x(2x - 1)^3$

7) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

8) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$

9) $y = \left(\dfrac{1}{x^3}\right)^5$

10) $y = \dfrac{3}{(1 - x^2)^4}$

11) $y = \left(\dfrac{x - 1}{x}\right)^4$

12) $y = \left(\dfrac{4x + 1}{x + 2}\right)^3$

13) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

14) $y = \left(\dfrac{4}{1 - x}\right)^3$

15) Escreva a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = (2x - 3)^5$ quando x = 2.

16) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 5}$ em x = 1.

17) Se g(0) = 4 e g′(0) = 2, determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x + g(x)}$ no ponto (0, 2).

18) A receita mensal de um fabricante com a venda de x unidades de um produto, para $x \leq 20$, é dada pela função $R(x) = 20\sqrt{100x - x^2}$. Determine a receita marginal para x = 10.

19) $C(x) = 0{,}1(x^2 + 50x)^2 + 10x^2 + 500x + 400$ é o custo total para produzir x unidades de um produto. Determine o custo marginal para x = 2.

20) A receita anual (em milhões de reais) de uma empresa x anos após a sua fundação em janeiro de 2.000 foi de $f(x) = \sqrt{10x^2 + x + 236}$. A que taxa a receita anual estava crescendo em janeiro de 2.004?

Respostas:

1) $-20(5-2x)^9$

2) $-20(4x+1)^{-6}$

3) $(-32x^3+4)(2x^4-x+1)^{-5}$

4) $7(x^2-3x+2)^6(2x-3)$

5) $10x(2x+3)^3(6x+3)$

6) $6(2x-1)^2(8x-1)$

7) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

8) $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+5)^2}}$

9) $\dfrac{-15}{x^{16}}$

10) $\dfrac{24x}{(1-x^2)^5}$

11) $\dfrac{4(x-1)^3}{x^5}$

12) $\dfrac{21(4x+1)^2}{(x+2)^4}$

13) $\dfrac{-4x}{(4x^2+1)^{3/2}}$

14) $\dfrac{192}{(1-x)^4}$

15) $y = 10x - 19$

16) $m = \dfrac{1}{2}$

17) $y = \dfrac{3x}{4}+2$

18) R$ 26,67 por unidade

19) R$ 1.663,20 por unidade

20) R$ 2.025.000,00 por ano

2.6 – Derivação Implícita e Taxas Relacionadas

Todas as funções com as quais trabalhamos até o momento foram dadas por equações da forma $y = f(x)$, nas quais a variável dependente y é definida **explicitamente** por uma expressão envolvendo a variável independente x. É o caso, por exemplo, de $y = x^3 - 4x + 1$

A equação $4x - 1 = x^3 - y$ define a mesma função $y = f(x)$, mas dizemos, nesse caso, que $y = f(x)$ está definida **implicitamente** pela equação.

Nesse exemplo, a função pode ser expressa facilmente nas formas explícita e implícita. Outras funções, no entanto, são definidas implicitamente por uma equação que envolve tanto a variável independente como a variável dependente e na qual é difícil ou mesmo impossível explicitar a variável dependente. É o caso, por exemplo, da equação $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$

Vamos supor que conhecemos uma equação que define y implicitamente como uma função de x e temos necessidade de calcular a derivada $\frac{dy}{dx}$.

Se a equação dada não pode ser resolvida explicitamente para y, mas sabemos que existe uma função f tal que $y = f(x)$, podemos obter $\frac{dy}{dx}$ através de uma técnica simples, que utiliza a regra da cadeia, e que pode ser usada sem a necessidade de explicitar y. Essa técnica é conhecida como **derivação implícita**.

Dada uma equação na qual se estabelece y implicitamente como uma função de x, podemos calcular $\frac{dy}{dx}$ derivando a equação termo a termo e utilizando a regra da cadeia quando derivarmos os termos contendo y; a seguir, resolvemos a equação resultante para $\frac{dy}{dx}$.

Exemplos:

1) Sabendo que x e y estão relacionados pela equação $x^2 + y^2 = 25$, determine $\frac{dy}{dx}$ utilizando derivação implícita.

2) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ definida implicitamente na equação $2x^2 + y^3 + y - 7 = 3xy$ no ponto $(-1, 1)$

3) Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ definida implicitamente na equação $x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x$ quando $x = 2$

Em algumas aplicações, x e y estão relacionados por uma equação, e ambas as variáveis são funções de uma terceira variável t (que quase sempre representa o tempo) e as fórmulas que descrevem x e y como funções de t não são conhecidas. Nesse caso, a derivação implícita pode ser usada para relacionar $\frac{dx}{dt}$ com $\frac{dy}{dt}$ e a equação relacionando as taxas pode ser utilizada para determinar uma delas quando a outra é conhecida. Nesse contexto, $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são chamadas de **taxas relacionadas**.

Exemplos:

1) Seja $x^2 - y^2 = 1$ e suponha que x e y são funções de t. Queremos determinar $\frac{dx}{dt}$ e sabemos que $x = 4$, $y = 5$ e $\frac{dy}{dt} = 0,08$.

Derivando implicitamente a equação dada em relação a t temos: $2x\frac{dx}{dt} - 2y\frac{dy}{dt} = 0$

Daí $x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} = 0$. Para $x = 4$, $y = 5$ e $\frac{dy}{dt} = 0,08$ temos: $4\frac{dx}{dt} - 0,4 = 0$. Logo $\frac{dx}{dt} = 0,1$

2) Suponha que x mil unidades de uma mercadoria são vendidas semanalmente quando o preço é de p reais por unidade e que x e p satisfaçam a equação de demanda $p + 2x + xp = 38$. Determine a taxa com a qual as vendas estão variando no tempo, quando $x = 4$, $p = 6$ e o preço está diminuindo a uma taxa de 40 centavos por semana.

Derivando implicitamente a equação de demanda em relação a t temos:

$$\frac{dp}{dt} + 2\frac{dx}{dt} + p\frac{dx}{dt} + x\frac{dp}{dt} = 0$$

Queremos determinar $\frac{dx}{dt}$ quando $x = 4$, $p = 6$ e $\frac{dp}{dt} = -0,40$

Logo $-0,40 + 2\frac{dx}{dt} + 6\frac{dx}{dt} - 1,60 = 0$. Daí $8\frac{dx}{dt} = 2$. Então $\frac{dx}{dt} = 0,25$ (mil unidades por semana)

Portanto, quando o preço diminui a uma taxa de 40 centavos por semana, as vendas aumentam a uma taxa de 250 unidades por semana.

3) Quando o preço unitário de certo produto é p reais, um produtor tende a ofertar x centenas de unidades. Sabendo que $3p^2 - x^2 = 12$, a que a taxa de oferta está variando mensalmente quando o preço é de R$ 4,00 por unidade e está aumentando à taxa de R$ 0,87 por mês?

4) Suponha que o preço p em reais e a quantidade x em milhares de unidades de um produto satisfaçam a equação de demanda $5p + 2x + xp = 80$ e que p e x sejam funções do tempo t. Determine a taxa com que a quantidade do produto está variando mensalmente quando $x = 10$, $p = 4$ e o preço está diminuindo a uma taxa de R$ 0,20 por mês.

Exercícios: lista 9

Nas questões 1 a 3 determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação dada para o valor indicado.

1) $x^2 = y^3$; $x = 8$

2) $xy = 2$; $x = 2$

3) $x^2y^3 - x = -2$; $x = 1$

4) Suponha que o preço p (em reais) e as vendas mensais x (em milhares de unidades) de certo bem satisfaçam a equação de demanda $2p^3 + x^2 = 4500$. Determine a taxa com a qual as vendas estão variando, quando o preço unitário é R$ 10,00 e está diminuindo a uma taxa de R$ 0,50 por mês.

5) Os custos semanais de produção y de uma fábrica e a sua produção x estão relacionados pela equação $y^2 - 5x^3 = 4$ com y sendo dado em milhares de reais e x em milhares de unidades. Determine a taxa com a qual os custos estão variando, quando $x = 4$, $y = 18$ e a produção está aumentando a uma taxa de 0,3 mil unidades por semana.

6) Suponha que o preço p (em reais) e a quantidade x (em milhares de unidades) de uma mercadoria satisfaçam a equação $6p + 5x + xp = 50$. Determine a taxa de variação da demanda quando o preço unitário é R$ 3,00 e está diminuindo a uma taxa de R$ 0,16 por mês.

7) Um fabricante está disposto a colocar por semana no mercado, x milhares de unidades de um produto por um preço unitário p. Sabe-se que a relação entre x e p é dada pela equação de oferta $x^2 - 3xp + p^2 = 5$. Com que rapidez a oferta do produto estará variando, quando $p = 11$, $x = 4$ e o preço aumentar a uma taxa de 10 centavos por semana?

8) A equação de demanda de um produto é $9p + x + xp = 94$ onde x milhares de unidades são demandadas por mês quando p reais é o preço unitário. Supondo que o preço unitário é R$ 9,00 e está aumentando a uma taxa de R$ 2,00 por mês, encontre a taxa de variação da demanda.

9) Suponha que p é o preço de um saco de laranjas, x o número de centenas de sacos ofertados diariamente e $px - 20p - 3x + 105 = 0$ a equação de oferta. Se a oferta diária está decrescendo a uma taxa de 250 sacos por dia, em que taxa os preços estão variando quando a oferta diária é de 5000 sacos?

10) Quando o preço unitário de um produto é p reais, a demanda é de x milhares de unidades e $x^2 + 3px + p^2 = 79$. Qual é a taxa de variação da demanda, se o preço unitário é R$5,00 e está diminuindo à razão de R$ 0,42 por mês?

11) Suponha que y seja o número de trabalhadores na força de trabalho necessária para produzir x unidades de determinado produto e que $4y^2 = x$. Se a produção este ano é de 250.000 unidades e a produção está aumentando à taxa de 18.000 unidades por ano, qual é a taxa a que a força de trabalho deverá crescer?

12) A equação de demanda de certo produto é $px + 25p = 4.000$ onde p reais é o preço de uma caixa do produto e x milhares de caixas é a quantidade procurada por semana. Se o preço é R$ 80,00 por caixa e está aumentando à taxa de R$ 0,20 por semana, encontre a taxa de variação da demanda.

Respostas:

1) $\frac{1}{3}$

2) $\frac{-1}{2}$

3) $y = 1$

4) As vendas estão aumentando a uma taxa de 3.000 unidades por mês

5) Os custos estão aumentando a uma taxa de R$ 2.000,00 por semana

6) A demanda está aumentando a uma taxa de 2.000 unidades por mês

7) A oferta aumentará a uma taxa de 40 unidades por semana

8) A demanda vai diminuir a uma taxa de 3.000 unidades por mês

9) O preço está diminuindo a uma taxa de R$ 0,50 por dia

10) A demanda está aumentando a uma taxa de 380 unidades por mês

11) A força de trabalho deverá crescer à taxa de 9 trabalhadores por ano.

12) A demanda diminui a uma taxa de 125 unidades por semana

2.7 – Derivadas de funções exponenciais e de funções logarítmicas

As funções exponenciais e logarítmicas estão entre as mais importantes do Cálculo, com muitas aplicações em campos tão diversos como a Física, a Biologia e a Economia. Nesta seção vamos apresentar as regras básicas de derivação para essas funções.

1 – Derivadas de funções exponenciais

Seja $a \in IR_+^* - \{1\}$ e seja u uma função derivável de variável x

Se $f(x) = a^u$ então $f'(x) = u'.a^u.\ln a$

Casos particulares:

1) Se $f(x) = e^u$ então $f'(x) = u'.e^u$

2) Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$

Exemplos:

1) $f(x) = 3^{x^2}$

2) $f(x) = 5^{2x^2+7x}$

3) $f(x) = 7^{1/x}$

4) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

5) $f(x) = \sqrt{e^{6x}+1}$

2 – Derivadas de funções logarítmicas

Seja $a \in IR_+^* - \{1\}$ e seja u uma função derivável de variável x

Se $f(x) = \log_a u$ então $f'(x) = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

Casos particulares:

1) Se $f(x) = \ln u$ então $f'(x) = \dfrac{u'}{u}$

2) Se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Exemplos:

1) $f(x) = \log_2(3x^2 - 2x + 1)$

2) $f(x) = \log(4x^5 - 7)$

3) $f(x) = 3\ln(2x - 1)$

4) $f(x) = \ln(2x - 1)^3$

5) $f(x) = (\ln(2x - 1))^3$

6) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

7) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

Exercícios - Lista 10

Nas questões de 1 a 20 calcule as derivadas, simplificando o resultado:

1) $f(x) = e^{5x^3 - x}$

2) $f(x) = 2^{5x^3 - x}$

3) $f(x) = 10^{-7x + 2}$

4) $f(x) = e^{-1/x}$

5) $f(x) = 3^{3x^2}$

6) $f(x) = (4x + e^{3x}).e^{2x}$

7) $f(x) = \sqrt{e^{4x} + 5}$

8) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{2x^3}$

9) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$

10) $f(x) = e^x \ln x$

11) $f(x) = \ln(4 + 5x)$

12) $f(x) = \ln \sqrt{4 + 5x}$

13) $f(x) = \ln(8 - 2x)^5$

14) $f(x) = (\ln(3x + 1))^2$

15) $f(x) = \ln \sqrt{1 + 4x^2}$

16) $f(x) = \log(3x^2 - 2x + 1)^2$

17) $f(x) = \log_2 \sqrt{x}$

18) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

19) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3}{x}\right)$

20) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Respostas:

1) $f'(x) = (15x^2 - 1)e^{5x^3 - x}$

2) $f'(x) = (15x^2 - 1)2^{5x^3 - x} \ln 2$

3) $f'(x) = (-7\ln 10)\, 10^{-7x + 2}$

4) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x}$

5) $f'(x) = (6x)\, 3^{3x^2} \ln 3$

6) $f'(x) = 4e^{2x} + 5e^{5x} + 8xe^{2x}$

7) $f'(x) = \dfrac{2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x} + 5}}$

8) $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x - 3)}{2x^4}$

9) $f'(x) = \dfrac{-1}{e^x}$

10) $f'(x) = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

11) $f'(x) = \dfrac{5}{4 + 5x}$

12) $f'(x) = \dfrac{5}{8 + 10x}$

13) $f'(x) = \dfrac{-5}{4 - x}$

14) $f'(x) = \dfrac{6\ln(3x + 1)}{3x + 1}$

15) $f'(x) = \dfrac{4x}{1 + 4x^2}$

16) $f'(x) = \dfrac{12x - 4}{(3x^2 - 2x + 1)\ln 10}$

17) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\ln 2}$

18) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

19) $f'(x) = -\dfrac{1}{x}$

20) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

2.8 – Derivadas de Ordem Superior

Sabemos que a derivada de $y = x^5$ é $y' = 5x^4$. Mas também podemos determinar derivada de $5x^4$ que é $20x^3$. Essa função é chamada de **derivada de segunda ordem** (ou simplesmente derivada segunda) de y e é denotada por y'' (onde as duas linhas indicam que a função foi derivada duas vezes) ou por $\frac{d^2y}{dx^2}$, isto é, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Derivando $y'' = 20x^3$, obtemos a derivada terceira $y''' = 60x^2$, e assim por diante.

De modo geral, o resultado de duas ou mais derivações sucessivas de uma função é uma **derivada de ordem superior**.

A **derivada de enésima ordem** de uma função é obtida derivando-se a função n vezes e é denotada por:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

Exemplos:

1) As quatro primeiras derivadas de $y = 2x^3 + 5x^2 - x + 8$ são:

$y' = 6x^2 + 10x - 1$

$y'' = 12x + 10$

$y''' = 12$

$y^{(4)} = 0$

2) Se $y = 7x^2 - \frac{5}{x^2}$ então

$$\frac{dy}{dx} = 14x + \frac{10}{x^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 14 - \frac{30}{x^4}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{120}{x^5}$$

Capítulo 3 – Regra de L'Hôpital

No capítulo 1 estudamos limites de quocientes tais como:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

Em cada caso, calculando os limites do numerador e do denominador, obtemos expressões indefinidas $\frac{0}{0}$, isto é, os quocientes indicados têm a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ em x = 3 e em x = 1, respectivamente.

Usamos, anteriormente, métodos algébricos para calcular esses limites, mas eles também podem ser determinados utilizando as derivadas das funções do numerador e do denominador do quociente.

Vamos considerar também a forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ na qual o numerador c o denominador tendem para ∞ ou $-\infty$.

O principal instrumento para o estudo das formas citadas é a **regra de L'Hôpital** que pode ser enunciada da seguinte maneira:

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I.

Suponha que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$.

a) Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

Se $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

b) Suponha que $\lim_{x\to a} |f(x)| = \lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$

Se $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, então, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Observação: A regra de L'Hôpital pode ser aplicada à determinação de limites laterais e de limites no infinito.

Exemplos:

1) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-3x^4+5x-3}{4x^5+2x^3-5x^2-1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 - 6x^2 + 1}{x+7}$

4) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 25}$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x^2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(x+1)}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 1}{\ln x}$

8) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\ln\left(x/7\right)}{7 - x}$

Algumas vezes, a aplicação da regra de L'Hôpital a uma forma indeterminada conduz a uma nova forma indeterminada. Quando isso acontece, uma segunda aplicação da regra pode ser necessária. Em alguns casos, é preciso aplicar a regra várias vezes para eliminar a indeterminação.

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^3}$

Há casos em que a indeterminação persiste não importando quantas vezes a regra seja aplicada e outros recursos, além da regra de L'Hôpital, precisam ser aplicados para determinar o limite. É o caso, por exemplo, do $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$

Aplicando a regra de L'Hôpital (duas vezes) obtemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{2x^3} \text{ (que continua indeterminado)}$$

Para determinar o limite, devemos fazer uma mudança de variável:

Seja $\frac{1}{x} = y$

Daí $\frac{1}{y} = x$

Então : $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y}}{1/y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{e^y} = 0$

Observação: É importante verificar se um dado quociente tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ antes de aplicar a regra de L'Hôpital. Se aplicarmos a regra a uma forma que não é indeterminada, podemos chegar a uma conclusão incorreta como veremos no exemplo a seguir.

Pelo que vimos no capítulo 1 (seção 1.5) sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \infty$

Se tivéssemos (incorretamente) aplicado a regra de L'Hôpital, teríamos obtido:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$

Como esse último quociente tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, aplicaríamos novamente a regra de L'Hôpital, encontrando:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Teríamos assim, chegado à conclusão (errada) que o limite dado é igual a 1.

Exercícios – lista 11

Use a regra de L'Hôpital para determinar os limites abaixo:

1) $\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 - x - 14}$

2) $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

3) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

4) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$

5) $\lim_{x \to 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{3 - x}$

6) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(e^{2x} + 1) - \ln 2}{x^2}$

7) $\lim_{x \to 2} \frac{\ln(2x - 3)}{\ln(3x - 5)}$

8) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\ln x}$

9) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

10) $\lim_{x \to 1} \frac{4x^3 - 5x + 1}{\ln x}$

11) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(7 + x)}{x}$

12) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{x^4 + x^3}$

13) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{4x}}{x^2}$

14) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + 2x - 1}{x^3}$

15) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x + e^x)}{x}$

16) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x + 2}$

17) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 4e^{-x} + 4}{x^2 + x}$

18) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

19) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - \sqrt{x}}$

20) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x - e^x + 1}{x^3}$

Respostas:

1) 5 / 13	2) 32	3) 3	4) – 3	5) – 6
6) ∞	7) 2 / 3	8) ∞	9) 0	10) 7
11) 0	12) ∞	13) ∞	14) ∞	15) 1
16) 0	17) 4	18) 0	19) 2	20) – ∞

Capítulo 4 – Aplicações da derivada

Vimos no capítulo 2, que a derivada de uma função pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente ao seu gráfico. Neste capítulo, vamos explorar este fato e desenvolver técnicas para o uso da derivada como auxílio à construção de gráficos. Também estão incluídas neste capítulo, aplicações da derivada a "problemas de otimização".

4.1 – Função crescente e função decrescente

Os conceitos de função crescente e de função decrescente podem ser introduzidos através dos gráficos de $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = -2x^3$.

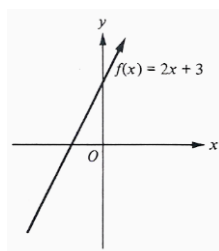



Figura 1

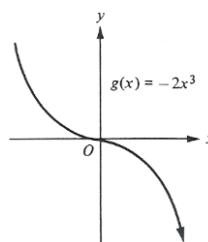



Figura 2

Na figura 1 observamos que os valores de f(x) crescem à medida que os valores de x aumentam. Dizemos, então, que f é crescente em IR.

Na figura 2, os valores de g(x) decrescem à medida que os valores de x aumentam. Neste caso, dizemos que g é decrescente em IR.

Em geral, estabelecemos as seguintes definições:

Definição: Uma função real é **crescente** em um intervalo I se à medida que os valores de x aumentam ($x \in I$), os valores de f(x) também aumentam, isto é:

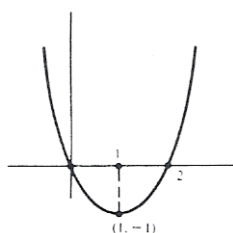
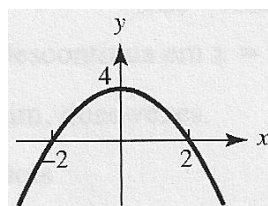
$$\text{Se } x_1 < x_2 \text{ então } f(x_1) < f(x_2)$$

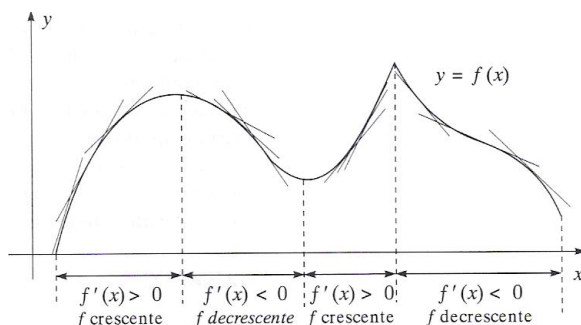
Definição: Uma função real é **decrescente** em um intervalo I se à medida que os valores de x aumentam ($x \in I$), os valores de f(x) diminuem, isto é:

$$\text{Se } x_1 < x_2 \text{ então } f(x_1) > f(x_2)$$

Outros exemplos:

1) $f(x) = x^2 - 2x$ é decrescente em $]-\infty, 1]$ e é crescente em $[1, \infty[$

2) $f(x) = 4 - x^2$ é crescente em $]-\infty, 0]$ e é decrescente $[0, \infty[$

$f(x) = x^2 - 2x$

$f(x) = 4 - x^2$

Observamos na figura abaixo, que nos intervalos onde os coeficientes angulares das retas tangentes são positivos, a função é crescente, e que nos intervalos onde os coeficientes angulares das retas tangentes são negativos, a função é decrescente.

Podemos então descobrir onde uma função derivável f é crescente ou decrescente, verificando o sinal de sua derivada, já que f ′(x) fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em (x, f(x)). Onde f ′(x) > 0, a inclinação da reta tangente é positiva e f é crescente; onde f ′(x) < 0, a inclinação da reta tangente é negativa e f é decrescente.

Teste da derivada primeira para funções crescentes e decrescentes:

Seja f uma função contínua em um intervalo I e derivável em I, não necessariamente nos pontos extremos de I

a) Se f ′(x) > 0 para todo x em I, exceto possivelmente nos pontos extremos de I, então f(x) é crescente em I

b) Se f ′(x) < 0 para todo x em I, exceto possivelmente nos pontos extremos de I, então f(x) é decrescente em I

Exemplos:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ é decrescente em [1,3] e é crescente em]– ∞, 1] e [3, ∞[

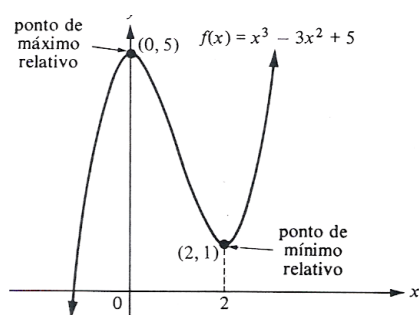
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ é decrescente em]– ∞, –1] e [0, 1] e é crescente em [–1,0] e [1, ∞[

3) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ é decrescente em]– ∞, 1[e em] 1, ∞[

4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é crescente em IR

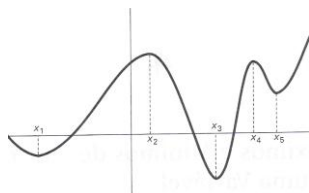
5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ é decrescente em]– ∞, 0] e é crescente em [0, ∞[

6) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ é decrescente [–2,0[e]0, 2] e é crescente em]– ∞, –2] e [2, ∞[

4.2 – Extremos relativos

O esboço do gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ ao lado, mostra que o ponto (0, 5) está mais alto do que qualquer outro ponto vizinho do gráfico. Um ponto tal como (0, 5) é chamado de **ponto de máximo relativo** (ou de **máximo local**) do gráfico de f.

Analogamente, o ponto (2, 1) que está mais baixo do que qualquer outro ponto vizinho do gráfico de f é denominado **ponto de mínimo relativo** (ou de **mínimo local**) do gráfico de f.

Se uma função possui um máximo ou um mínimo relativo em um ponto P, dizemos que possui um **extremo relativo** (ou extremo local) em P.

Os pontos (0, 5) e (2, 1) são exemplos de extremos relativos no sentido de que cada um deles representa um extremo apenas na vizinhança do ponto. Devemos considerar, portanto, que uma função pode admitir vários extremos relativos, isto é, vários mínimos e máximos relativos.

Quando conhecemos os intervalos nos quais uma função é crescente ou decrescente, podemos identificar os seus máximos e mínimos relativos. Um **máximo relativo** ocorre quando a função para de crescer e começa a decrescer. Um **mínimo relativo** ocorre quando a função para de decrescer e começa a crescer.

Sabemos que uma função f(x) é crescente quando $f'(x) > 0$ e é decrescente quando $f'(x) < 0$ então os únicos pontos onde f(x) pode ter extremos relativos são aqueles onde $f'(x) = 0$ ou onde não existe $f'(x)$. Esses pontos são chamados de **pontos críticos**.

Definição: Um número c pertencente ao domínio de uma função f é chamado de **número crítico**, se $f'(c) = 0$ ou se $f'(c)$ não existe. O ponto correspondente (c, f(c)) no gráfico de f é chamado de **ponto crítico**.

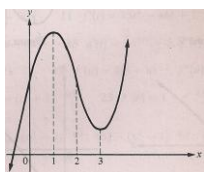
Para encontrar todos os extremos relativos de uma função f, começamos achando todos os pontos críticos (que são os "candidatos" a extremos relativos). Cada ponto crítico precisa ser testado para verificar se é realmente um extremo relativo. Esse teste pode ser feito usando a derivada primeira de f.

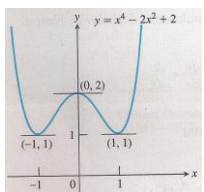
Teste da derivada primeira para extremos relativos

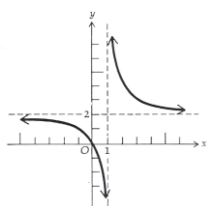
Seja c um número crítico de f(x)

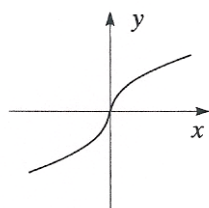
a) Se $f'(x) > 0$ à esquerda de c e $f'(x) < 0$ à direita de c então (c, f(c)) é um ponto de máximo relativo.

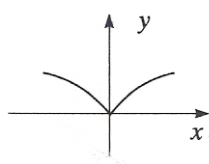
b) Se $f'(x) < 0$ à esquerda de c e $f'(x) > 0$ à direita de c então (c, f(c)) é um ponto de mínimo relativo

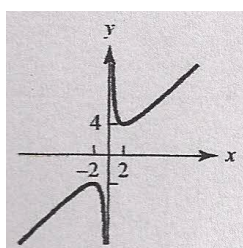
Exemplos:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

(1, 5) é ponto de máximo relativo e (3, 1) é ponto de mínimo relativo.

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

(–1, 1) e (1, 1) são pontos de mínimo relativo e (0, 2) é ponto de máximo relativo.

3) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

Não existem extremos relativos.

4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Não existem extremos relativos

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(0, 0) é ponto de mínimo relativo.

6) $f(x) = f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

(2, 4) é ponto de mínimo relativo e (– 2, – 4) ponto de máximo relativo

A derivada segunda também pode ser usada para classificar os pontos críticos de uma função como máximos ou mínimos relativos. Para isso, basta aplicar o resultado conhecido como:

Teste da derivada segunda para extremos relativos:

Suponhamos que $f'(c) = 0$

a) Se $f''(c) > 0$ então f possui um mínimo relativo em (c, f(c))

b) Se $f''(c) < 0$ então f possui um máximo relativo em (c, f(c))

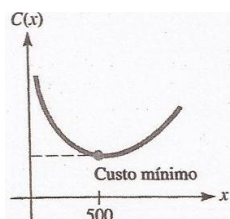
Exemplo: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

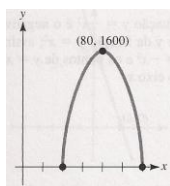
Como a derivada primeira $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$ se anula em $x = -2$ e em $x = 1$, os pontos correspondentes $(-2,13)$ e $(1,-14)$ são os pontos críticos de f. Para testar esses pontos, basta determinar a derivada segunda $f''(x) = 12x + 6$ e calcular seu valor em $x = -2$ e em $x = 1$. Então, como $f''(-2) = -18$ temos que $(-2,13)$ é um ponto de máximo relativo; como $f''(1) = 18$, $(1,-14)$ é um ponto de mínimo relativo.

Embora tenha sido fácil usar o teste da derivada segunda para classificar os pontos críticos no exemplo anterior, ele apresenta algumas limitações. O teste se aplica aos pontos críticos nos quais a derivada primeira é nula, mas não aos pontos em que a derivada primeira não existe. Além disso, se tanto $f'(c)$ como $f''(c)$ são nulas, o teste da derivada segunda não permite chegar a nenhuma conclusão.

4.3 – Problemas de Otimização

Nas aplicações, os valores extremos de uma função são chamados, às vezes, de **valores ótimos**, porque são, em certo sentido, os melhores ou os mais favoráveis valores da função em um determinado contexto. A tarefa de determinar esses valores constitui um **problema de otimização**.

Exemplos:

1) O custo total da fabricação de x unidades de um produto é dado por $C(x) = 0{,}48x + \dfrac{120.000}{x} + 34.500$ para $0 < x \leq 600$. Determine o valor de x que resulta no custo mínimo.

2) A função de demanda de certo produto é dada pela equação $q = 6.000 - 200\sqrt{p}$ para $0 < p \leq 900$, onde p é o preço unitário e q é o número de unidades vendidas. Determine o preço que maximiza a receita.

3) Um fabricante pode produzir mochilas por um custo de R$ 40,00 a unidade. Estima-se que se forem vendidas por x reais a unidade, os consumidores comprarão 120 – x mochilas por mês. Expresse o lucro mensal do fabricante em função de x. Ache o preço ótimo de venda e o lucro máximo obtido pelo fabricante.

4) O custo semanal de produção de x geladeiras é dado pela função $C(x) = x^3 - 3x^2 - 80x + 500$ e cada geladeira é vendida por R$ 2.800,00. Que produção semanal maximiza o lucro? Qual é o maior lucro possível?

4.4 – Concavidade do gráfico de uma função

Vamos apresentar, agora, um método para determinar se a concavidade do gráfico de uma função é "para cima" ou "para baixo". Para termos uma ideia do que isso significa, vamos analisar os gráficos esboçados nas figuras abaixo.

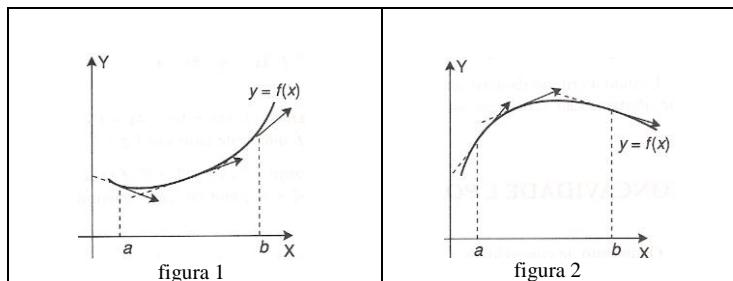



figura 1 figura 2

Na figura 1, observamos que a inclinação da reta tangente aumenta quando x aumenta. Nesse caso, a concavidade do gráfico é para cima. Na figura 2, a inclinação da reta tangente diminui quando x aumenta. Nesse caso, a concavidade do gráfico é para baixo.

Usando a derivada podemos definir a concavidade do gráfico de uma função da seguinte maneira:

Definição: Seja f(x) uma função derivável em um intervalo I.

a) O gráfico de f(x) tem **concavidade** (ou é côncavo) **para cima** em I, se $f'(x)$ é crescente em I.

b) O gráfico de f(x) tem **concavidade** (ou é côncavo) **para baixo** em I, se $f'(x)$ é decrescente em I.

Para saber se a concavidade de um gráfico é para cima ou para baixo, ou seja, se $f'(x)$ é crescente ou decrescente, basta aplicar a $f'(x)$ o teste da derivada primeira para funções crescentes e decrescentes apresentado na seção anterior: $f'(x)$ é crescente se sua derivada é positiva; $f'(x)$ é decrescente se sua derivada é negativa. Como a derivada de $f'(x)$ é a segunda derivada de f, isto é, $f''(x)$, podemos estabelecer o seguinte teorema:

Teste da derivada segunda para concavidade de um gráfico:

Seja f uma função duas vezes derivável em I.

a) O gráfico de f tem concavidade para cima em I, se $f''(x) > 0$ para todo x em I.

b) O gráfico de f tem concavidade para baixo em I, se $f''(x) < 0$ para todo x em I .

Exemplos:

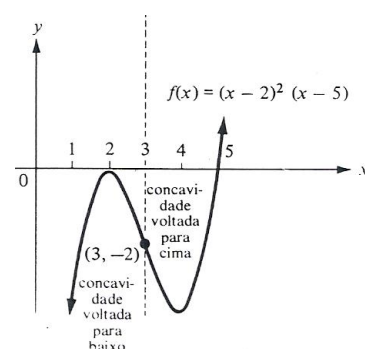
1) O gráfico de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ tem concavidade para baixo em $]-\infty, 2[$ e para cima em $]2, \infty[$

2) O gráfico de $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ tem concavidade para cima em $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ e $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right[$ e para baixo em $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

3) O gráfico de $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tem concavidade para baixo em $]-\infty, -1[$ e para cima em $]1, \infty[$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tem concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$ e para cima em $]0, \infty[$

5) O gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ tem concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, \infty[$

Cada ponto do gráfico de uma função onde a concavidade muda é chamado de **ponto de inflexão**. Por exemplo, o ponto (3,–2) na figura ao lado é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x) = (x-2)^2(x-5)$.

Definição: Um ponto (c, f(c)) do gráfico de f é um **ponto de inflexão** se são verificadas as duas condições:

a) f é contínua em c.

b) a concavidade do gráfico de f muda em (c, f(c)).

Exemplos:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

(2, 3) é ponto de inflexão do gráfico de f

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{13}{9}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{13}{9}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico de f

3) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Como o gráfico de f só muda de concavidade em x = 1 e f não é contínua em x = 1, não existem pontos de inflexão no gráfico de f.

4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(0, 0) é ponto de inflexão do gráfico de f

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Como a concavidade do gráfico de f não muda, não existem pontos de inflexão no gráfico de f.

4.5 – Esboços de gráficos

Para esboçar o gráfico de uma função, precisamos verificar sua continuidade, os intervalos nos quais é crescente ou decrescente, a concavidade e a existência de assíntotas, extremos relativos e pontos de inflexão. Como o estudo dessas características foi realizado em várias seções anteriores, vamos estabelecer um roteiro para o traçado do gráfico de uma função real f.

1 – Achar o domínio de f e determinar onde f é contínua.

2 – Calcular os limites envolvendo infinito para determinar, se existirem, as assíntotas horizontais e verticais.

3 – Calcular $f'(x)$ e determinar os números críticos (isto é, os valores de x tais que $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe). Utilizar o teste da derivada primeira para achar os intervalos em que f é crescente ($f'(c) > 0$) ou decrescente ($f'(c) < 0$). Usar o teste da derivada primeira para encontrar os pontos de máximos e mínimos relativos (se existirem).

4 – Calcular $f''(x)$ e usar o teste da derivada segunda para determinar os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima ($f''(x) > 0$) e onde é côncavo para baixo ($f''(x) < 0$). Se f é contínua em c e se $f''(x)$ mudar de sinal em c, determinar o ponto de inflexão $(c, f(c))$.

5 – Determinar se existirem e não depender de muito cálculo, os pontos de interseção com os eixos coordenados (e alguns outros pontos fáceis de calcular).

Exercícios – lista 12

1) O lucro obtido com a produção e venda de x unidades de certa mercadoria é dado pela função $L(x) = -\ 0{,}02x^2 + 140x - 300$. Determine o valor de x que maximiza o lucro.

2) A função receita de um produto é $R(x) = 6x - \frac{1}{2}x^2$. Ache o valor de x que maximiza a receita.

3) O custo total da fabricação de x unidades de um produto é dado por $C(x) = 4x^2 - 240x + 9.000$. Determine o valor de x que resulta no custo mínimo.

4) A função custo de uma firma que produz e vende x unidades de um produto é dada por $C(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 15$ e a função receita é $R(x) = 28x$. Ache o valor de x que maximiza o lucro.

5) $C(x) = 0{,}001x^2 + 0{,}02x + 500$ é o custo de fabricação de x unidades de um produto e cada unidade é vendida por R$ 8,00. Determine o número de unidades que maximiza o lucro.

6) Ache a quantidade x que maximiza o lucro, sabendo que a receita e o custo são, respectivamente, $R(x) = 5x - 0{,}003x^2$ e $C(x) = 1{,}1x + 300$ com $0 < x \leq 1.000$.

7) O custo por unidade de produção também é importante na Economia. Essa função é chamada de custo médio e sua derivada é o custo médio marginal. Se C(x) é o custo total associado à produção de x unidades de um produto, o custo médio é $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$.
Sabendo que $C(x)\ 2x^2 - 15x + 3.200$ é o custo de fabricação de x unidades de um produto, determine o valor de x que resulta no custo médio mínimo.

8) As funções custo e receita de x unidades de um produto são em reais, respectivamente, $C(x) = 10 + 2x$ e $R(x) = 50x - 0{,}1x^2$. Determine o lucro máximo.

9) A função de demanda para um produto é dada por $p = 4 - 0{,}0002x$ onde p é o preço unitário em reais e x é a quantidade demandada. O custo total da produção de x unidades é dado pela função $C(x) = 600 + 3x$. Determine o número de unidades que maximiza o lucro e o preço unitário correspondente.

10) A função de demanda de certo produto é dada por $q = -\ 6p + 780$ onde q é a quantidade demandada e p o preço unitário. Escreva a receita como função de p e determine o preço que resulta na receita máxima.

11) As funções custo e receita de uma fábrica que produz e vende x unidades de um produto são, respectivamente, $C(x) = -\ x^2 + 80x + 75$ e $R(x) = -\ 3x^2 + 200x$ com $0 \leq x \leq 40$. Determine o valor de x que maximiza o lucro e o lucro máximo correspondente.

12) Uma fábrica produz estantes a um custo de R$ 80,00 a unidade. Estima-se que se as estantes forem vendidas por x reais a unidade, aproximadamente 100 – x unidades serão vendidas por mês. Escreva o lucro mensal como uma função do preço de venda x e ache o preço ótimo de venda.

13) O custo, em reais, para produzir x unidades de um produto por semana é dado pela função $C(x) = 70x + 6.600$ e a receita obtida com a venda de x unidades por semana é dada pela função $R(x) = 180x - \frac{x^2}{4}$ com $0 \le x \le 400$. Supondo que a empresa venda todas as unidades que produz, quantas unidades devem ser fabricadas para maximizar o lucro? Qual será esse lucro?

14) As funções custo e receita de x unidades de um produto são em reais, respectivamente, $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 4x + 200$ e $R(x) = 49x - x^2$. Determine o valor de x que maximiza o lucro.

15) Um empresário estima que quando x unidades de certa mercadoria são produzidas, o custo total em reais é $C(x) = \frac{x^2}{8} + 3x + 98$. Para que nível de produção o custo médio é mínimo?

16) Suponha que o lucro de um fabricante de rádios seja dado pela função $L(x) = 400(15 - x)(x - 2)$ onde x é o preço unitário pelo qual os rádios são vendidos. Encontre o preço de venda que maximiza o lucro.

Respostas:

1) $x = 3.500$

2) $x = 6$

3) $x = 30$

4) $x = 5$

5) 3990 unidades

6) $x = 650$

7) $x = 40$

8) R$ 5.750,00

9) 2500 unidades; R$ 3,50

10) R$ 65,00

11) $x = 30$; R$ 1.725,00

12) R$ 90,00

13) 220 unidades; R$ 5.500,00

14) $x = 20$

15) $x = 28$

16) R$ 8,50

Exercícios – lista 13

Nas questões de 1 a 6 faça um esboço do gráfico de f, determinando:
a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente.
b) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e onde tem concavidade voltada para cima.
c) os pontos de máximos e mínimos relativos e os pontos de inflexão do gráfico de f.
.

1) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

2) $f(x) = x^3 – 3x + 2$

3) $f(x) = 1 + 3x^2 – x^3$

4) $f(x) = x^3$

5) $f(x) = 3x^4 – 4x^3$

6) $f(x) = 12x^2 – x^4$

Nas questões 7 a 12, determine, se existirem: a) os intervalos onde f é crescente e onde é decrescente; b) os intervalos onde o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e onde tem concavidade voltada para cima; c) os pontos de máximos e mínimos relativos e os pontos de inflexão do gráfico de f; d) as equações das assíntotas verticais e das assíntotas horizontais. Faça um esboço do gráfico de f.

7) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{-4}{x-2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{4}{(x-2)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{-8}{(x-2)^3}$

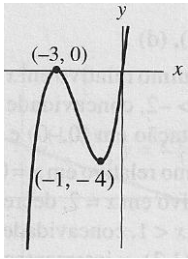
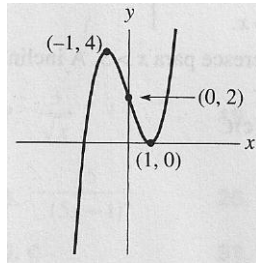
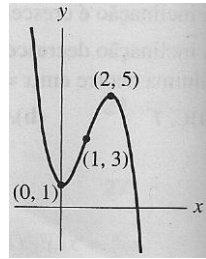
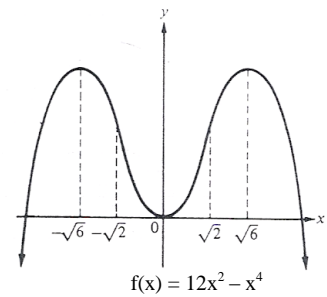
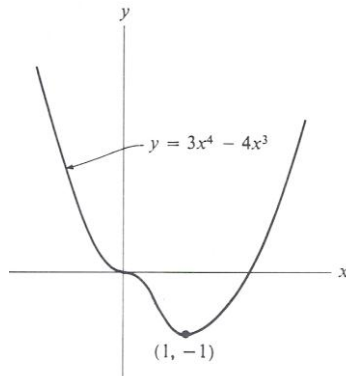
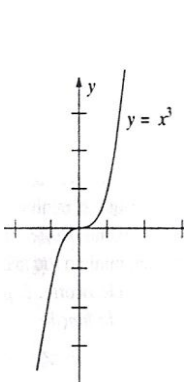
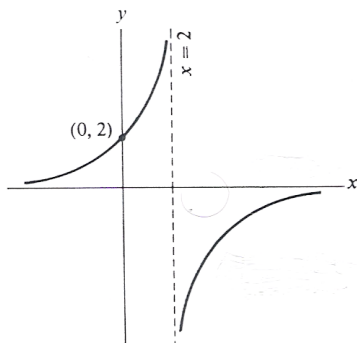
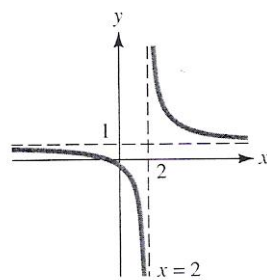
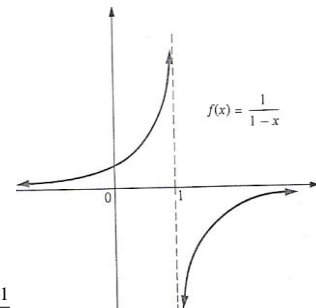
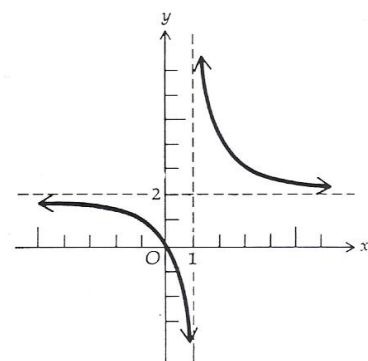
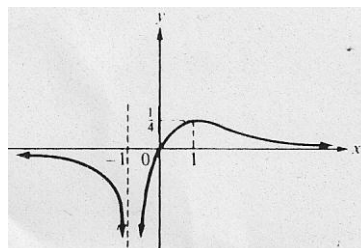
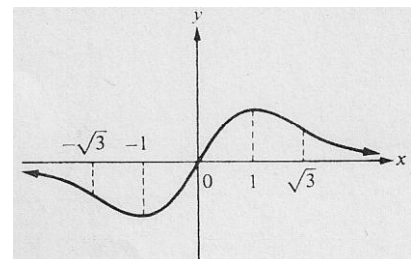
8) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^3}$

9) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

10) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

11) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$ $\quad f''(x) = \dfrac{2x-4}{(x+1)^4}$

12) Sabe-se que $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{4x^3-12x}{(x^2+1)^3}$

Respostas:

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

$f(x) = x^3 – 3x + 2$

$f(x) = 1 + 3x^2 – x^3$

$f(x) = 12x^2 – x^4$

$f(x) = \frac{-4}{x-2}$

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$f(x) = \frac{2x}{x-1}$

$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$

$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Capítulo 5 – Integral

Neste capítulo vamos estudar a "antiderivação", que inverte o processo de derivação e permite encontrar todas as funções que têm uma dada função como derivada. Também vamos mostrar que com a antiderivação podemos solucionar "equações diferenciais" e relacionaremos a antiderivada ao problema de calcular a área de regiões do plano xy.

Antes de entrar nesse assunto, no entanto, vamos introduzir a ideia de "diferenciais", já que a "notação diferencial" será útil para a antiderivação.

5.1 – Diferenciais

Anteriormente $\frac{dy}{dx}$ foi considerado um símbolo para a derivada de y em relação à x, mas em alguns problemas é útil interpretar dy e dx separadamente. Nesse contexto, dy é denominado a **diferencial de y** e dx é a **diferencial de x**.

Definição: Seja f uma função real tal que $y = f(x)$. A **diferencial dx** é uma quantidade que pode tomar (ou designar) qualquer número real diferente de zero. Se f é derivável em x, a **diferencial dy** é definida por $dy = f'(x)dx$

Exemplo 1: Seja $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5$

a) Determine dy

b) Determine dy para $x = 1$ e $dx = 0{,}01$

c) Determine dy para $x = 1$ e $dx = -0{,}02$

Observação: Pela definição anterior, podemos escrever que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ e assim, a notação $\frac{dy}{dx}$ já usada como um símbolo para a derivada pode ser considerada um quociente entre duas diferenciais. Assim, todas as fórmulas que fornecem a derivada $\frac{dy}{dx}$ podem ser convertidas em fórmulas que dão a diferencial dy. Na lista abaixo, apresentamos algumas fórmulas para diferenciais.

Sejam u e v funções deriváveis em x, c um número real qualquer e r um número racional qualquer.

1) $dc = 0$

2) $d(u + v) = du + dv$

3) $d(u.v) = udv + vdu$

4) $d(u^r) = r.u^{r-1}du$

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

6) $d(e^u) = e^u du$

7) $d(\ln u) = \frac{du}{u}$

Exemplo 2: Seja $y = (x^4 - 3x + 2)^5$. Determine dy

Exemplo 3: Seja $y = \ln(x^3 + 5x)$. Determine dy

5.2 – Antiderivada – Integral Indefinida

Na maioria dos exemplos e problemas estudados até agora, começamos com uma função dada e calculamos a derivada para obter informações a respeito da função. Em muitas situações, no entanto, o problema é o inverso: conhecemos a derivada e estamos interessados em determinar a função. Isso acontece, por exemplo, quando sabemos a taxa com a qual uma população está aumentando e queremos calcular qual será a população em um determinado instante futuro. A função encontrada nesse problema é uma antiderivada.

Definição 1: Uma função g é uma **antiderivada** (ou primitiva) de uma função f em um intervalo I se $g'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Exemplos:

1) $g(x) = x^3 + 2x$ é uma antiderivada de $f(x) = 3x^2 + 2$, pois $g'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$.

2) $g_1(x) = 2$, $g_2(x) = -\frac{1}{7}$ e $g_3(x) = \sqrt{2}$ são antiderivadas de $f(x) = 0$, pois, a derivada de qualquer função constante é zero. De modo geral, se f é uma função tal que $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo I, então existe um número real k tal que $f(x) = k$ para todo x em I.

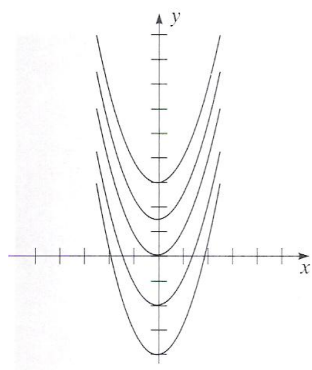
3) $g(x) = x^2$ é uma antiderivada de $f(x) = 2x$, pois $g'(x) = 2x = f(x)$.

4) $g_1(x) = x^2 + 2$, $g_2(x) = x^2 - \frac{1}{7}$ e $g_3(x) = x^2 + \sqrt{2}$ também são antiderivadas de $f(x) = 2x$

Uma diferença importante entre a derivada e a antiderivada é o fato de que a antiderivada de uma função não é única. Em geral, se uma função g é uma antiderivada de uma função f em um

intervalo I e se $h(x) = g(x) + C$ onde C é uma constante arbitrária, então h também é uma antiderivada de f no intervalo I.

Por esse processo, obtemos todas as possíveis antiderivadas de f(x) e podemos estabelecer o seguinte resultado:

Teorema: Seja g uma antiderivada de f em um intervalo I.
Se h é uma outra antiderivada de f em I então existe uma constante C tal que $h(x) = g(x) + C$.

Portanto, quando encontramos uma antiderivada g de uma função f, temos uma **família infinita de antiderivadas** de f.

Para $f(x) = 2x$, por exemplo, existe uma família de antiderivadas da forma $g(x) = x^2 + C$ onde C é uma constante arbitrária.

Geometricamente, o gráfico de qualquer antiderivada de $f(x) = 2x$ é obtido deslocando verticalmente o gráfico de $g(x) = x^2$.

Ao considerarmos todas as antiderivadas de uma dada função é conveniente introduzirmos uma nova terminologia e uma nova notação, como se segue:

Definição 2: Seja f(x) uma função dada. A **integral indefinida** de f(x), representada por $\int f(x)dx$ é a família de todas as antiderivadas de f(x). Se g(x) é uma das antiderivadas de f(x) e C é uma constante arbitrária,

$$\int f(x)\,dx = g(x) + C$$

De acordo com essa definição, o símbolo $\int$ é o **sinal de integral**; f(x) é a **função integrando**; f(x)dx é o **integrando** e C é a **constante de integração**.

Daremos razões, mais adiante, para o uso da diferencial dx que aparece no integrando. No momento vamos considerar que o símbolo dx indica que a antiderivada deve ser calculada em relação à variável x.

O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado de **integração indefinida** ou **antiderivação.**

Exemplos:

1) $\int (3x^2 + 2)\,dx = x^3 + 2x + C$

2) $\int 2x\,dx = x^2 + C$

Dizer que g(x) é uma antiderivada de f(x) equivale a dizer que f(x) é a derivada de g(x), mas agora pensamos em f(x) como a função dada e em g(x) como a função a ser encontrada.

A ligação que existe entre a derivação e a antiderivação permite usar as regras já conhecidas de derivação para obter regras correspondentes para antiderivação.

Regras básicas de antiderivação

1) $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$

2) Se a é um número real então $\int a\, f(x)\ dx = a \int f(x)\ dx$

3) $\int dx = x + C$

4) Se $n \in Q$ e $n \neq -1$ então $\int x^n\ dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

5) $\int \dfrac{dx}{x} = \int x^{-1}\ dx = \ln|x| + C$

Observação: A regra 1 pode ser estendida a qualquer número finito de parcelas.

Exemplos:

1) $\int 7\ dx$

2) $\int (x^2 + 5)\ dx$

3) $\int (5x^3 + 4x^{-5} - 4)\ dx$

4) $\int \left(6x - 6\sqrt{x} + \dfrac{5}{x^6}\right) dx$

5) $\int (3x + 2)^2\ dx$

6) $\int (x^2 + 5)(8x - 3)\ dx$

7) $\int \frac{x^2 - 4}{x + 2}\, dx$

8) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + 2}{x^2}\, dx$

9) $\int \frac{2x^7 + 5x^3 + 4x^2 - 6x}{2x^3}\, dx$

10) $\int \left(\frac{1}{2x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 5\sqrt[3]{x^2} \right) dx$

Exercícios - lista 14

Use as regras básicas para calcular as integrais abaixo:

1) $\int (3x^2 - 4x - 5)\ dx$

2) $\int (x^3 - 3x^2 + 2x - 4)\ dx$

3) $\int (2x^3 - 4x^2 - 5x + 6)\ dx$

4) $\int (2x^3 - 1)(x^2 + 5)\ dx$

5) $\int (3x^2 - 5\sqrt{x} + 2)\ dx$

6) $\int (4x^2 + 3)^2\ dx$

7) $\int (x^2 + 3x + x^{-2})\ dx$

8) $\int (3x^{-2} + 5x^{-4})\ dx$

9) $\int (25x^3 - 1)x^{-1/2}\,dx$

10) $\int \left(\sqrt{x^7} + 5\sqrt[4]{x}\right)\ dx$

11) $\int \dfrac{x^3 + 2x - 7}{x}\ dx$

12) $\int \left(3x^2 - 6x + 4x^{-1}\right) dx$

13) $\int \dfrac{3x^5 - x^4 + 7x^3 + 4x}{x^3}\ dx$

14) $\int \dfrac{9x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 1}{x^2}\ dx$

Respostas:

1) $x^3 - 2x^2 - 5x + C$

2) $\dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2 - 4x + C$

3) $\dfrac{x^4}{2} - \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x + C$

4) $\dfrac{x^6}{3} + \dfrac{5x^4}{2} - \dfrac{x^3}{3} - 5x + C$

5) $x^3 - \dfrac{10}{3}x^{3/2} + 2x + C$

6) $\dfrac{16x^5}{5} + 8x^3 + 9x + C$

7) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - x^{-1} + C$

8) $-3x^{-1} - \dfrac{5}{3}x^{-3} + C$

9) $\dfrac{50}{7}x^{7/2} - 2x^{1/2} + C$

10) $\dfrac{2}{9}x^{9/2} + 4x^{5/4} + C$

11) $\dfrac{1}{3}x^3 + 2x - 7\ln|x| + C$

12) $x^3 - 3x^2 + 4\ln|x| + C$

13) $x^3 - \dfrac{x^2}{2} + 7x - 4x^{-1} + C$

14) $3x^3 - 2x^2 + 5x - 2\ln|x| + x^{-1} + C$

5.3 – Aplicações de integral indefinida

Os problemas de integrais indefinidas também podem ser expressos na forma de **equações diferenciais**. Equação diferencial é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas (ou diferenciais). A solução de uma equação diferencial é uma função ou família de funções que satisfazem a equação.

O exemplo a seguir é equivalente ao exemplo 2 da página 61, mas escrito na forma de uma equação diferencial.

Exemplo 1: Resolva a equação diferencial $y' = x^2 + 5$

A solução desta equação é a integral indefinida do exemplo 2, isto é, $y = \int (x^2 + 5)\, dx$

Então $y = \dfrac{x^3}{3} + 5x + C$

Uma solução desta forma, que envolve uma constante arbitrária e inclui todas as soluções possíveis, é chamada de **solução geral** da equação diferencial.

Exemplo 2: Resolva a equação diferencial $y' = x^{-2} + 15x^2 + 10$

Exemplo 3: Determine a solução geral da equação diferencial $y' = 20x^3 - 6x^2 + 7$

Os problemas que dão origem a equações diferenciais estão frequentemente vinculados a condições adicionais, chamadas **condições iniciais**, **condições de contorno** ou **condições marginais** sobre as variáveis envolvidas. Essas condições adicionais podem ser usadas para destacar uma **solução particular** da solução geral.

Sabendo, por exemplo, que $y = 4$ quando $x = 3$ obtemos da solução geral do exemplo 1,

$y = \dfrac{x^3}{3} + 5x - 20$ que é uma solução particular da equação diferencial dada.

Exemplo 4: Ache a solução geral da equação diferencial $y' = 3x^2 + 5x - 7$ e determine a solução particular sabendo que $y = -2$ quando $x = 1$

Exemplo 5: O custo marginal da produção de x unidades de um produto é dado por $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$. O custo total de produzir duas unidades é R$ 900,00. Qual o custo total de produção 5 unidades?

Exemplo 6: O lucro marginal de uma empresa é $100 - 2x$ (reais por unidade) para x unidades fabricadas. Se o lucro é R$ 700,00 para 10 unidades fabricadas, qual o maior lucro possível?

Exercícios – lista 15

Nas questões de 1 a 3 determine a solução da equação diferencial:

1) $y' = 6x^2 - 4x + 1$ 2) $y' = x^4 + 2x^2 - x^{-2}$ 3) $y' = 16x^3 + 10 + 6x^{-2}$

Nas questões de 4 a 6 ache a solução particular da equação diferencial que satisfaz a condição indicada:

4) $y' = 3x^2 + x$ para $y = -2$ e $x = 1$

5) $y' = x^3 + 4x^{-2}$ para $y = 7$ e $x = 2$

6) $y' = \dfrac{5x^4}{2} + 6x^3 + x$ para $y = 4$ e $x = -1$

7) O lucro marginal de uma empresa que produz e vende certo produto é $L'(x) = -0{,}2x + 50$ onde x é o número de unidades vendidas por dia. Quando 100 unidades são produzidas e vendidas, o lucro da empresa é R$ 1.500,00. Determine o lucro da empresa para o nível de produção e vendas de 200 unidades.

8) A função custo marginal para fabricar certo produto é $C'(x) = 3x^2 - 60x + 900$ para $0 \le x \le 30$ e o custo fixo é R$ 1.000,00. Calcule o custo para fabricar 30 unidades do produto.

9) O lucro marginal de uma empresa que produz e vende x unidades de um produto por semana é $L'(x) = 15 - 0{,}01x$. Nas semanas em que não é vendida nenhuma unidade, a empresa tem um prejuízo de R$ 1.000,00. Qual será o lucro da empresa se vender 1.000 unidades em uma semana?

10) O custo marginal da produção de x unidades de um produto é dado por $6x + 1$. O custo total de produzir uma unidade é R$ 130,00. Qual o custo total de produzir 10 unidades?

11) O valor de revenda de certa máquina industrial decresce a uma taxa que varia com o tempo, durante um período de 10 anos. Quando a máquina tem t anos de uso, a taxa na qual seu valor está variando é de $220(t - 10)$ reais por ano. Se a máquina valia R$ 12.000,00 quando nova, qual será seu valor com 10 anos de uso?

12) Um fabricante sabe que, se x unidades de certo artigo são fabricadas por semana, o custo marginal é dado por $C'(x) = 0{,}3x - 11$. O preço de venda está fixado em R$19,00 por unidade e o custo fixo semanal é de R$ 200,00. Ache o lucro total máximo que pode ser obtido por semana.

13) O custo marginal de uma empresa é dado por $C'(x) = 80 - 4x$ reais por unidade, quando são fabricadas x unidades. Sabe-se que o custo da empresa é R$ 500,00 quando são fabricadas 5 unidades. Determine o custo de fabricação de 20 unidades.

14) O lucro marginal de uma fábrica que produz e vende certo produto é $L'(x) = 3x^2 - 2x - 17$ onde x é o número de unidades. Sabe-se que a fábrica perderá R$ 100,00 se vender apenas duas unidades. Determine o lucro da fábrica com a produção e venda de 10 unidades.

15) O custo marginal de x unidades de um produto é dado por $C'(x) = 12 - \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ reais por unidade. Sabe-se que o custo de 100 unidades é R$ 1.540,00. Determine o custo de 400 unidades.

16) Um fabricante estima que a receita marginal para um nível de produção de x unidades de um produto é dada por $R'(x) = \dfrac{200}{\sqrt{x}}$. O custo marginal correspondente é 0,4x reais por unidade. Se o lucro do fabricante é R$ 2.000,00 quando são produzidas de 25 unidades, qual será o lucro para um nível de produção de 36 unidades?

Respostas:

1) $y = 2x^3 - 2x^2 + x + C$

2) $y = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + C$

3) $y = 4x^4 + 10x - 6x^{-1} + C$

4) $y = x^3 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{7}{2}$

5) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4}{x} + 5$

6) $y = \dfrac{x^5 + 3x^4 + x^2 + 5}{2}$

7) R$ 3.500,00

8) R$ 28.000,00

9) R$ 9.000,00

10) R$ 436,00

11) R$ 1.000,00

12) R$ 1300,00

13) R$ 950,00

14) R$ 660,00

15) R$ 4.980,00

16) R$ 2.265,80

5.4 – Integração por substituição

Muitas antiderivadas não podem ser encontradas aplicando-se diretamente as regras básicas. No entanto, algumas vezes é possível encontrar uma antiderivada utilizando-se essas regras após mudar a variável.

Precisamos calcular, por exemplo, $\int 2x\sqrt{x^2+5}\,dx$ (1)

Se fizermos $u = x^2 + 5$, então, $du = 2xdx$ e (1) torna-se $\int \sqrt{u}\,du$ (2)

Resolvendo (2) encontramos $\frac{2}{3}\sqrt{u^3} + C$ (3)

Substituindo u por $x^2 + 5$ em (3) temos nosso resultado: $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+5)^3} + C$

A justificativa do procedimento usado no exemplo anterior é dada pelo teorema a seguir, que é análogo à regra da cadeia para derivação.

Teorema 1: Seja h uma função derivável de variável x e seja g uma antiderivada de f. Então, se $u = h(x)$,

$$\int f(h(x))h'(x)dx = \int f(u)du = g(u) + C = g(h(x)) + C$$

Exemplos:

1) $\int \sqrt{5x+8}\,dx$

2) $\int x(3x^2+1)^8\,dx$

3) $\int \frac{6x^2dx}{(x^3+4)^5}$

4) $\int (5x^2+1)\sqrt[4]{5x^3+3x-2}\,dx$

5) $\int x\sqrt{x+5}\,dx$

Exercícios - lista 16

Calcule as integrais:

1) $\int (4x + 3)^4 \, dx$

2) $\int x(4x^2 + 7)^9 \, dx$

3) $\int 4x\sqrt{x^2 + 5} \, dx$

4) $\int 3x(4 - 3x^2)^{-8} \, dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x^2 + 16}} \, dx$

6) $\int \frac{8x + 2}{(4x^2 + 2x + 6)^{17}} \, dx$

7) $\int \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^3} \, dx$

8) $\int \frac{x - 3}{(x^2 - 6x + 1)^2} \, dx$

9) $\int (2x^2 - 1)(6x^3 - 9x + 1)^{-3/2} \, dx$

10) $\int (x^2 + 3x + 5)^8 (18x + 27) \, dx$

11) $\int x (x + 1)^{-1/2} \, dx$

12) $\int x(5 - x)^{1/2} \, dx$

Respostas:

1) $\frac{(4x + 3)^5}{20} + C$

2) $\frac{(4x^2 + 7)^{10}}{80} + C$

3) $\frac{4}{3}\sqrt{(x^2 + 5)^3} + C$

4) $\frac{1}{14(4 - 3x^2)^7} + C$

5) $\frac{3}{20} (5x^2 + 16)^{2/3} + C$

6) $\frac{-1}{16} (4x^2 + 2x + 6)^{-16} + C$

7) $-(x^3 + 1)^{-2} + C$

8) $\frac{-1}{2}(x^2 - 6x + 1)^{-1} + C$

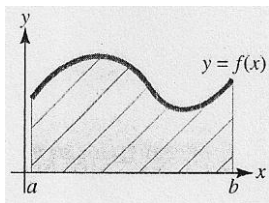
9) $-\frac{2}{9}(6x^3 - 9x + 1)^{-1/2} + C$

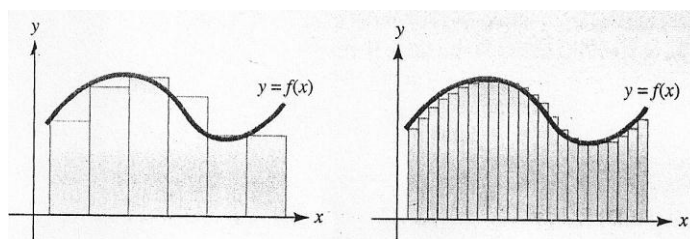
10) $(x^2 + 3x + 5)^9 + C$

11) $\frac{2}{3} (x + 1)^{3/2} - 2(x + 1)^{1/2} + C$

12) $-\frac{10}{3}(5 - x)^{3/2} + \frac{2}{5}(5 - x)^{5/2} + C$

5.5 – Integral Definida – Noção intuitiva

Já sabemos que a derivada tem origem geométrica: está ligada ao problema de traçar a reta tangente a uma curva. A integral definida também tem origem geométrica: está ligada ao problema de determinar a área de uma região plana limitada por uma curva qualquer.

Vamos considerar uma função f(x) contínua em um intervalo [a, b] e supor que $f(x) \geq 0$ nesse intervalo. Queremos calcular a área A da figura delimitada pela curva y = f(x), as retas x = a e x = b e pelo eixo x.

Para determinar essa área, vamos dividir a região dada em uma série de regiões retangulares e calcular o valor aproximado da área A somando as áreas dessas regiões retangulares. Quanto maior o número de retângulos, mais a soma de suas áreas se aproxima do que consideramos, intuitivamente, a área sob a curva dada.

A área A pode ser interpretada, portanto, como a soma de uma infinidade de retângulos que podemos descrever assim: em cada ponto x há um retângulo de altura f(x) e base infinitamente pequena, indicada por dx, de modo que a área de cada retângulo é dada pelo produto f(x)dx.

Para indicar que estamos obtendo a área A como a soma infinita das áreas f(x)dx de todos esses retângulos no intervalo [a, b] escrevemos: $A = \int_a^b f(x)dx$

O símbolo $\int_a^b f(x)dx$ é chamado de **integral definida** de a até b de f(x).

Os números a e b são chamados de **limites de integração**; a é o **limite de integração inferior** e b é o **limite de integração superior**.

O cálculo da integral definida de a até b de f (x) pode ser facilmente realizado graças a um importante resultado, conhecido como **Teorema Fundamental do Cálculo**:

Seja f(x) uma função contínua em [a, b]. Se g(x) é uma antiderivada de f(x) em [a, b] então

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Exemplos:

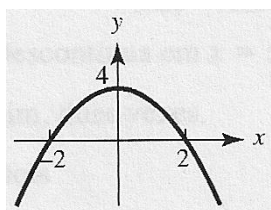
1) $\int_1^4 (3x^2 - 4x + 5)\,dx$

2) $\int_{0}^{5} (2x - 4)\, dx$

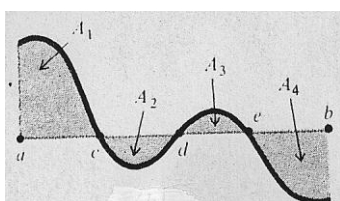
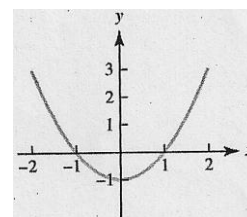
3) $\int_{-1}^{1} (x^4 + 2x + 1)\, dx$

Usando a notação de integral definida, a definição da área da região sob o gráfico de uma função pode ser expressa da seguinte maneira:

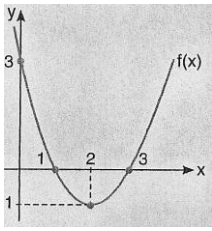
Definição: Seja f uma função contínua em [a, b] e tal que f(x) ≥ 0 em [a, b]. A área da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b é dada por $A = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Exemplo: Calcule a área da região sob o gráfico de $f(x) = 4 - x^2$ entre x = – 2 e x = 2

Observação: Assumimos na definição anterior, que f(x) ≥ 0 em [a, b], isto é, que o gráfico de f(x) entre x = a e x = b estava acima do eixo x. Se a região entre x = a e x = b limitada pelo gráfico de f e o eixo x permanece inteiramente abaixo do eixo x, então cada valor de f(x) é negativo. Assim, cada f(x)dx é negativo e a área dessa região é o simétrico da integral definida de a até b de f(x), isto é,

Se f é uma função contínua em [a, b] e tal que f(x) ≤ 0 em [a, b], então a área da região sob o gráfico de f entre x = a e x = b é dada por $A = -\int_{a}^{b} f(x)dx$

Exemplo: Calcule a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ entre x = – 1 e x = 1

Se a curva está parcialmente acima do eixo x e parcialmente abaixo como é mostrado na figura ao lado, então a área pode ser considerada como uma soma de termos positivos e negativos, correspondentes a partes da região que estão acima e abaixo do eixo x.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_{a}^{c} f(x)dx - \int_{c}^{d} f(x)dx + \int_{d}^{e} f(x)dx - \int_{e}^{b} f(x)dx$$

Exemplo: Determine a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ entre $x = 0$ e $x = 3$

A integral definida tem aplicações importantes além da determinação da área sob uma curva.

Exemplos:

1) A função lucro marginal de uma fábrica é $f(x) = 100 + 50x - 3x^2$ reais por unidade, quando o nível de produção é de x unidades. Encontre o valor do lucro extra obtido com a venda de 3 unidades adicionais, sabendo que atualmente estão sendo produzidas 5 unidades.

2) Quando o nível de produção de certo artigo é de 80 unidades, a receita marginal é dada por $R'(x) = -3x^2 + 200x + 10.000$. Determine a variação da receita quando a produção aumenta para 100 unidades.

3) O custo marginal (em reais) de um produto é dado por $C'(x) = -3x^2 + 6x + 80$ quando x centenas de unidades são produzidas. Determine o aumento do custo quando o nível de produção aumenta de 200 para 600 unidades.

Exercícios – lista 17

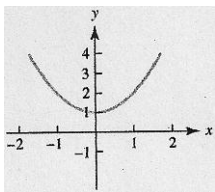
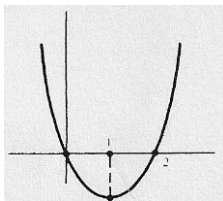
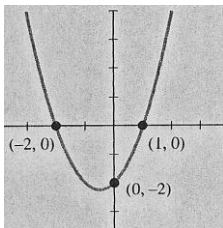
Nas questões de 1 a 4, calcule as integrais definidas:

1) $\int_{1}^{4} (x^2 - 4x - 3)\, dx$

2) $\int_{-1}^{2} (x + x^4)\, dx$

3) $\int_{4}^{8} \left(6 - \frac{x}{2}\right) dx$

4) $\int_{1}^{3} \frac{2x^3 - 4x^2 + 3}{x^2}\, dx$

5) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ entre $x = -1$ e $x = 2$

6) Determine a área da região sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x$ entre $x = 1$ e $x = 2$

7) Determine a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2 + x - 2$ entre $x = -2$ e $x = 2$

8) A função receita marginal (em reais por unidade) associada à venda de x unidades de um produto é dada por $R'(x) = -0{,}1x + 40$. Determine a receita adicional realizada quando o nível de produção e venda cresce de 200 para 300 unidades.

9) A função lucro marginal associada à venda de x centenas de unidades de um produto é dada por $L'(x) = -3x^2 + 24x + 5$ reais por unidade. Determine o lucro adicional obtido quando o nível de venda cresce de 200 para 400 unidades.

10) Em uma fábrica, o custo marginal em reais é dado pela função $f(x) = 70 + 4x - x^2$ quando x unidades são produzidas. Ache o aumento do custo quando o nível de produção aumenta de 3 para 9 unidades.

11) Suponha que a função custo marginal de um fabricante de sacolas seja de $100 + 2x - 3x^2$ reais por unidade, quando o nível de produção é de x unidades. Se atualmente estão sendo produzidas duas unidades, encontre o custo total para se produzir 6 unidades adicionais.

12) A função receita marginal para a venda de um produto é dada por $R'(x) = 300 - 12\sqrt{x}$ reais por unidade onde x indica o número de unidades vendidas. Determine a receita adicional realizada quando o nível de produção e venda cresce de 100 para 400 unidades.

13) Numa fábrica, o custo marginal é $C'(x) = 200 - 30\sqrt{x}$ onde x é o número de latas, em milhares, do produto e o custo é em reais. Qual será o aumento total no custo, se a produção for aumentada de 4000 para 25000 latas?

Respostas:

1) –18

2) 81 / 10

3) 12

4) 2

5) 6

6) 2 /3

7) 19 / 3

8) R$ 1.500,00

9) R$ 98,00

10) R$ 330,00

11) R$ 156,00

12) R$ 34.000,00

13) R$ 1.860,00

5.6 – Integração por Partes

Nesta seção vamos estudar uma técnica que pode ser usada para integrar certos produtos de funções. Essa técnica, conhecida como **integração por partes**, é uma conseqüência direta da regra do produto para diferenciais. A fórmula de integração por partes é apresentada a seguir.

Sejam u e v funções de variável x

Sabemos que $d(uv) = udv + vdu$

Ou, equivalentemente, $udv = d(uv) - vdu$

Integrando ambos os membros dessa equação temos: $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$

Ou ainda, $\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$ (1)

A equação (1) é chamada de **fórmula para integração por partes**.

Esta fórmula transforma o problema do cálculo de $\int udv$ no cálculo de $\int vdu$. Através de uma escolha conveniente de u e dv pode ser mais fácil calcular a segunda integral do que a primeira.

Na fórmula acima, deixamos de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas as constantes podem ser representadas por uma única constante que será introduzida no final do processo.

Exemplos:

1) $\int x \ln x \, dx$

2) $\int \ln 2x^2 \, dx$

3) $\int x e^{4x} \, dx$

4) $\int 6x e^{-2x} \, dx$

Às vezes, a integração por partes leva a uma nova integral que também pode ser integrada por partes

5) $\int x^2 e^x\, dx$

Algumas integrais podem ser calculadas por integração por partes ou por substituição. As soluções podem parecer diferentes, mas se estiverem corretas, poderão diferir, no máximo, por uma constante.

Exemplo: $\int x\sqrt{x+5}\; dx$

Fazendo u = x e dv = $\sqrt{x+5}$, temos que du = dx e v = $\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$

Então, usando o método de integração por partes, achamos:

$$\int x\sqrt{x+5}\; dx = \frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + C$$

Fazendo u = x + 5, dx = du e x = u – 5. Então, resolvendo por substituição, encontramos:

$$\int x\sqrt{x+5}\; dx = \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$$

Observe que $\frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} = (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{3} - \frac{4}{15}(x+5)\right) =$

$$= (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{3} - \frac{4x}{15} - \frac{20}{15}\right) = (x+5)^{3/2}\left(\frac{10x}{15} - \frac{4x}{15} + \frac{10}{5} - \frac{10}{3}\right) =$$

$$= (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{5} + \frac{10}{5} - \frac{10}{3}\right) = (x+5)^{3/2}\left(\frac{2}{5}(x+5) - \frac{10}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2}$$

Exercícios – lista 18

Use o método de integração por partes para calcular as integrais abaixo:

1) $\int \ln x \, dx$

2) $\int x.e^{-2x} \, dx$

3) $\int x \ln 3x \, dx$

4) $\int x e^{x} \, dx$

5) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

6) $\int x^{-2} \ln x \, dx$

7) $\int x e^{x/2} \, dx$

8) $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

9) $\int 5x e^{3x} \, dx$

10) $\int 3x^2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) dx$

Respostas:

1) $x \ln x - x + C$

2) $\frac{-xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$

3) $\frac{x^2}{2} \ln 3x - \frac{x^2}{4} + C$

4) $x e^{x} - e^{x} + C$

5) $\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$

6) $\frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

7) $2x e^{x/2} - 4 e^{x/2} + C$

8) $\frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9} x^3 + C$

9) $\frac{5}{3} x e^{3x} - \frac{5}{9} e^{3x} + C$

10) $x^3 \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^3}{3} + C$

Revisão 1 – Álgebra básica

1 **– Produtos Notáveis**

– Quadrado da soma de dois termos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

– Quadrado da diferença de dois termos: $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$

– Produto da soma pela diferença de dois termos: $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$

– Cubo da soma de dois termos: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

– Cubo da diferença de dois termos: $(a + b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$

2 – Fatoração de expressões algébricas

Fatorar uma expressão algébrica significa escrevê-la na forma de um produto de dois ou mais termos (fatores). A fatoração é usada para simplificar expressões e para resolver equações e se baseia na lei da distributividade da multiplicação. Alguns dos métodos de fatoração de expressões algébricas são:

– Colocação de fator comum em evidência

Exemplos: 1) Fatore $4x^5 + 8x^3$

Solução: Como os dois termos dessa expressão são divisíveis por $4x^3$, podemos usar a lei da distributividade para colocar $4x^3$ "em evidência" e escrever:

$$4x^5 + 8x^3 = 4x^3(x^2 + 2)$$

2) Fatore a expressão $10(x – 5)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(x – 5)^3$

Solução: Os dois termos são divisíveis por $2(x – 5)^3(x + 1)^4$

Colocando esse fator em evidência temos:

$$10(x – 5)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(x – 5)^3 = 2(x – 5)^3(x + 1)^4[5(x – 5) + 4(x + 1)]$$

Efetuamos os produtos nos termos entre colchetes e reduzimos os termos semelhantes para chegar ao resultado final.

$$10(x – 5)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(x – 5)^3 = 2(x – 5)^3(x + 1)^4(9x – 21)$$

– Agrupamento de fatores comuns

Exemplo: Fatore $ax – bx + 2a – 2b$

Solução: $ax – bx + 2a – 2b = x(a – b) + 2(a – b) = (a – b)(x + 2)$

– Diferença de dois quadrados: $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$

Exemplo: $4x^2 – 25y^2 = (2x + 5y)(2x – 5y)$

– **Soma de dois cubos:** $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$

Exemplo: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 – 2x + 4)$

– **Diferença de dois cubos:** $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplo: $x^3 – 8 = x^3 – 2^3 = (x – 2)(x^2 + 2x + 4)$

– Trinômio do 2º grau do tipo $x^2 + Sx + P$ com coeficientes inteiros

De acordo com a lei da distributividade, temos que:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$$

Indicando a + b por S e ab por P obtemos: $(x + a)(x + b) = x^2 + Sx + P$

Então, para fatorar um trinômio do tipo $x^2 + Sx + P$ devemos procurar dois números a e b tais que a + b = S e ab = P e montar o produto (x + a)(x + b)

Exemplo: Fatore os trinômios abaixo:

a) $x^2 + 5x + 6$

Solução: Precisamos encontrar números inteiros a e b tais que a + b = 5 e ab = 6

Então a = 2 e b = 3. Portanto $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

b) $x^2 – 5x + 6$

Solução: Nesse caso devemos ter a + b = – 5 e ab = 6. Então a = – 2 e b = – 3

Logo, $x^2 – 5x + 6 = (x –2)(x –3)$

c) $x^2 – 5x – 6$

Solução: Agora devemos encontrar a + b = – 5 e ab = – 6. Nesse caso a = – 6 e b = 1

Logo $x^2 – 5x – 6 = (x – 6)(x + 1)$

3 – Simplificação de expressões algébricas por fatoração e cancelamento

Podemos combinar a fatoração e o cancelamento para simplificar frações algébricas obtendo uma fração mais simples que seja equivalente à fração dada.

Exemplos: 1) $\dfrac{6a^2bx}{2ab^3x} = \dfrac{3a}{4b^2}$

2) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a+b)} = \dfrac{a-b}{a+b}$

3) $\dfrac{10xy}{10x^2 + 5xy} = \dfrac{10xy}{5x(2x + y)} = \dfrac{2y}{2x + y}$

4 – Resolução de equações por fatoração

A fatoração pode ser usada para resolver certas equações. A técnica se baseia no fato de que se o produto de dois ou mais termos é nulo, pelo menos um dos termos deve ser nulo. Por exemplo, se a.b = 0 devemos ter a = 0 ou b = 0.

Exemplos: 1) $x^2 - 3x - 10 = 0$

Solução: Fatorando, obtemos: $(x - 5)(x + 2) = 0$

Então $x - 5 = 0$ ou $x + 2 = 0 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -2$

2) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

Solução: Fatorando, obtemos: $x^2(x + 1) - 4(x + 1) = 0 \Rightarrow (x + 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1)(x + 2)(x - 2) = 0$

Então $x + 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$

5 – Resolução de equações do 2º grau pela fórmula de Báskara

É possível encontrar as soluções de uma equação do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ usando uma expressão conhecida como fórmula de Báskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplos: 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Solução: Temos que a = 1, b = – 5 e c = 6. Aplicando a fórmula de Báskara obtemos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 2$$

2) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Solução: Temos que a = 4, b = – 4 e c = 1. Aplicando a fórmula de Báskara obtemos:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

3) $x^2 + 2x + 3 = 0$

Solução: Temos que a = 1, b = 2 e c = 3. Aplicando a fórmula de Báskara obtemos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Então não existem raízes reais

Exercícios

Nas questões 1 a 10, calcule os produtos notáveis:

1) $(x + 5)^2$

2) $(3x + 4y)^2$

3) $(x^2 + y^3)^2$

4) $(7 – x)^2$

5) $(6x – 3)^2$

6) $(9x + 5x^4)(9x – 5x^4)$

7) $(x +3)(x – 3)$

8) $(x^2 + 4y)(x^2 – 4y)$

9) $(2x + 5)^3$

10) $(x – 3)^3$

Nas questões 11 a 24, fatore os polinômios:

11) $x^2 + x – 2$

12) $x^2 + 3x – 10$

13) $x^2 – 7x + 12$

14) $x^2 + 8x + 12$

15) $x^2 – 2x + 1$

16) $x^2 + 14x + 49$

17) $16x^2 – 81$

18) $9x^2 – 25y^2$

19) $x^3 – 1$

20) $x^3 – 27$

21) $x^7 – x^5$

22) $x^3 + 2x^2 + x$

23) $2x^3 – 8x^2 – 10x$

24) $x^4 + 5x^3 – 14 x^2$

Nas questões 25 a 28, fatore a expressão dada:

25) $x^2 + 4x + xy + 4y$

26) $x^3 + 2x^2 – x – 2$

27) $4(x – 3)^2(x + 1) + 10(x – 3)^3$

28) $4(x + 3)^4(x – 2)^2 – 6(x + 3)^3(x – 2)^3$

Nas questões 29 a 32 simplifique o quociente dado o máximo possível:

29) $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 5x - 14}$

30) $\dfrac{(x+5)^3(x+2) - (x+5)^2(x+2)^2}{x^2 + 7x + 10}$

31) $\dfrac{2x(x+1)^3 - x^2(x+1)^2}{x^2 + 3x + 2}$

32) $\dfrac{2(1-x)^3(x+3)^3 + 4(1-x)^2(x+3)^4}{(1-x)^3}$

Nas questões 33 a 36 use o método da fatoração para resolver a equação dada:

33) $x^2 – 2x – 8 = 0$

34) $x^2 + 10x + 25 = 0$

35) $x^2 – 4x + 3 = 0$

36) $x^2 – 8x + 16 = 0$

Nas questões 37 a 40 use a fórmula de Báskara para resolver a equação dada:

37) $x^2 + 10x + 25 = 0$

38) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

39) $x^2 – 2x + 3 = 0$

40) $1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} = 0$

Respostas:

1) $x^2 + 10x + 25$

2) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

3) $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$

4) $49 – 14x + x^2$

5) $36x^2 – 36x + 9$

6) $81x^2 – 25x^8$

7) $x^2 – 9$

8) $x^4 – 16y^2$

9) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

10) $x^3 – 9x^2 + 27x – 27$

11) $(x + 2)(x – 1)$

12) $(x + 5)(x – 2)$

13) $(x – 3)(x – 4)$

14) $(x + 2)(x + 6)$

15) $(x – 1)^2$

16) $(x + 7)^2$

17) $(4x + 9)(4x – 9)$

18) $(3x + 5y)(3x – 5y)$

19) $(x – 1)(x^2 + x + 1)$

20) $(x – 3)(x^2 + 3x + 9)$

21) $x^5(x + 1)(x – 1)$

22) $x(x + 1)^2$

23) $2x(x – 5)(x + 1)$

24) $x^2(x + 7)(x – 2)$

25) $(x + y)(x + 4)$

26) $(x + 2)(x + 1)(x – 1)$

27) $2(x – 3)^2(7x – 13)$

28) $2(x + 3)^3(x – 2)^2(12 – x)$

29) $\frac{x+3}{x-7}$

30) $3(x + 5)$

31) $x(x + 1)$

32) $\frac{2(x+3)^3(x+7)}{1-x}$

33) $x = 4$; $x = – 2$

34) $x = – 5$

35) $x = 1$; $x = 3$

36) $x = 4$

37) $x = – 5$

38) $x = – 1$; $x = – ½$

39) Não existem soluções

40) $x = 1$; $x = – 5$

Revisão 2 – Função

Em muitas situações da vida prática, o valor de uma grandeza depende do valor de uma segunda grandeza. Assim, por exemplo, a demanda de carne pode depender do preço do produto; a poluição do ar em uma cidade pode depender do número de veículos nas ruas; o valor de uma garrafa de vinho pode depender do ano em que o vinho foi fabricado. Relações como essas muitas vezes podem ser representadas matematicamente através de **funções**.

Em termos gerais, uma **função** consiste em dois conjuntos e uma “regra” que associa os elementos de um conjunto aos elementos do outro. Vamos supor, por exemplo, que um fabricante esteja interessado em determinar o efeito do preço sobre o número de unidades vendidas de certo produto. Para estudar essa relação, é preciso conhecer o conjunto de preços admissíveis, o conjunto de vendas possíveis e uma regra para associar cada preço a um determinado número de unidades vendidas.

A definição de função que vamos adotar é a seguinte:

Definição: Uma **função** é uma relação que associa a cada elemento x de um conjunto A um e apenas um elemento y de um conjunto B.

As letras f, g e h serão usadas para representar funções embora, em situações práticas, seja comum usar letras que lembrem as grandezas envolvidas.

Na definição anterior, o conjunto A é chamado de **domínio** da função e o conjunto B de **contradomínio**. Nas funções estudadas neste texto, o domínio e o contradomínio serão conjuntos de números reais.

O valor y que uma função f associa a um número x do domínio é chamado de **imagem de x por f** e é denotado por f(x) (lê-se “f de x”).

Usualmente definimos uma função f enunciando apenas a “regra” para achar f(x). Nesse caso, fica subentendido que o domínio de f é o conjunto de todos os números reais que tornam possíveis as operações indicadas na regra. Assim, por exemplo, se $f(x) = \sqrt{x}$ o domínio é o conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a zero. Além disso, quando escrevemos f(4) = 2 estamos indicando que o número que a função f associa ao número 4 é 2 (ou que 2 é a imagem de 4 por f).

Observação: Se x está no domínio de f dizemos que f **está definida em x** ou que **f(x) existe.** A expressão **f não está definida em** x significa que x não está no domínio de f.

Muitas fórmulas que ocorrem na Matemática e nas ciências determinam funções. Por exemplo, a fórmula $S = \pi r^2$ da área S de um círculo de raio r associa a cada número real positivo r exatamente um valor de S. A letra r que representa um número arbitrário do domínio é uma **variável independente**. A letra S, cujo valor depende do valor atribuído a r, é uma **variável dependente**. Quando duas variáveis r e S estão relacionadas desta maneira dizemos que **S é uma função de r.**

Funções também podem ser representadas por tabelas e descrições por palavras. Outras se representam naturalmente com gráficos, como o eletrocardiograma (EKG). Embora seja possível

construir uma fórmula para representar aproximadamente uma função EKG, isto raramente é feito. O que o médico precisa é o esquema de repetições, e é muito mais fácil vê-lo num gráfico do que numa fórmula. Mas cada EKG representa uma função que dá a amplitude de impulsos elétricos gerados no músculo cardíaco em função do tempo.

Para representar geometricamente a função $y = f(x)$ em um gráfico, costuma-se usar um sistema de coordenadas no qual as unidades da variável independente x são marcadas no eixo horizontal e as unidades da variável dependente y são marcadas no eixo vertical. O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x,y) onde x pertence ao domínio de f e $y = f(x)$, ou seja, todos os pontos da forma (x, f(x)). Estudaremos no capítulo 4 algumas técnicas para desenhar gráficos de funções.

Observações: 1) f é uma **função polinomial**, se f(x) é um polinômio, isto é,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

onde os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são números reais e os expoentes são números inteiros não-negativos. Se $a_n \neq 0$ então f é de grau n. Exemplos:

grau 0: $f(x) = a$ (função constante)

grau 1: $f(x) = ax + b$ (função linear)

grau 2: $f(x) = x^2 + bx + c$ (função quadrática)

2) Uma **função racional** é um quociente entre duas funções polinomiais

3) **Função algébrica** é aquela que pode ser expressa como soma, diferença, produto, quociente ou potência racional de polinômios. As funções que não são algébricas são chamadas de **transcendentes**. As funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas são exemplos de funções transcendentes.

Exercícios

Nas questões de 1 a 5 especifique o domínio de cada função.

1) $f(x) = x^2 + 2$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$

3) $f(x) = \sqrt{x-2}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Nas questões de 6 a 10 calcule os valores indicados da função dada.

6) $f(x) = x^2 + 4$

a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $f(\sqrt{2})$

7) $f(x) = \frac{1}{x}$

a) $f(-1)$ b) $f(\sqrt{2})$ c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $f\left(\frac{3}{4}\right)$

8) $f(x) = \sqrt{x-2}$

a) $f(2)$ b) $f(3)$ c) $f(4)$ d) $f(6)$

9) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(0)$ d) $f(10)$

10) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

a) $f(0)$ b) $f(-2)$ c) $f(2)$ d) $f(5)$

Nas questões 11 e 12 as funções são “definidas por mais de uma sentença”. Determine o domínio e os valores especificados de cada uma delas:

11) Sendo $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ 4x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

a) $f(0)$ b) $f(1)$ c) $f\left(\frac{3}{2}\right)$ d) $f(4)$

12) Sendo $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 5 & \text{se} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

a) $f(-5)$ b) $f(0)$ c) $f(2)$ d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e) $f\left(\frac{11}{3}\right)$

13) O custo total[1] em reais para fabricar x unidades de um produto é dado pela função $C(x) = x^3 - 30x^2 + 500x + 200$. Determine o custo de fabricação de 20 unidades do produto.

14) A função de demanda[2] para um produto é dada por $p = 35x + 15$ onde p é o preço unitário em reais e x é a quantidade demandada. Expresse a função receita[3] obtida com a venda do produto como uma função de x e determine a receita para $x = 10$.

15) As funções custo e receita de uma fábrica que produz e vende x unidades de um produto são, respectivamente, $C(x) = 9x + 800$ e $R(x) = 21x$. Determine o lucro[4] obtido quando são produzidas e vendidas 150 unidades.

16) Seja $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

a) Determine o domínio de f

b) Calcule, se possível:

$f(-2)$

$f(-1)$

$f(0)$

$f(1)$

---

(1) Uma **função custo** (total) descreve o custo de produção de determinado bem e varia, de modo geral, em função da quantidade produzida desse bem. No custo de produção existem duas parcelas: uma parte fixa, chamada **custo fixo**, que não depende da quantidade produzida e corresponde aos gastos fixos de produção tais como aluguel e manutenção do prédio; e uma parte variável, chamado **custo variável**, que depende da quantidade produzida e envolve, por exemplo, compra de matéria prima e pagamento de mão-de-obra. A **função custo** é a soma dos custos fixo e variável.

(2) Uma função de demanda expressa a relação entre o preço unitário e a quantidade demandada de um produto.

(3) A função receita (total) é obtida multiplicando o número de unidades vendidas pelo preço unitário.

(4) A função lucro (total) é expressa pela diferença entre as funções receita e custo.

Respostas:

1) IR

2) IR^*

3) $[2, \infty)$

4) IR

5) IR – { –1, 1}

6) a) 5	b) 4	c) $\frac{17}{4}$	d) 6
7) a) – 1	b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	c) 2	d) $\frac{4}{3}$
8) a) 0	b) 1	c) $\sqrt{2}$	d) 2
9) a) – 1	b) 0	c) $\sqrt[3]{-2}$	d) 2
10) a) 0	b) $\frac{-2}{3}$	c) $\frac{2}{3}$	d) $\frac{5}{24}$

11) Dom f = IR	a) – 1	b) 5	c)10	d) 65	
12) Dom f = IR	a) – 1	b) 5	c)5	d) 5	e) 1

13) R$ 6.200,00

14) R$ 3.650,00

15) R$ 1.000,00

16) a) IR – {1} b) f(–2) = 0 ; f(–1) = 1 ; f(0) = 2 ; f(1) não está definido

Revisão 3 – Coeficiente angular – Equações de retas

As linhas retas num plano têm equações muito simples, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas. Estas equações podem ser deduzidas utilizando-se o conceito de **coeficiente angular**.

Definição: Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos distintos de uma reta r. Se $x_1 \neq x_2$ então o **coeficiente angular** (ou inclinação) m de r é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Exemplo 1: Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (–2, 5) e (3, –1).

Exemplo 2: Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos (7, 1) e (3, 1).

Observações:

1– O valor de m calculado pela definição anterior é independente da escolha dos dois pontos em r.

2 – Se $x_1 = x_2$ então r é uma **reta vertical** e seu coeficiente angular não está definido.

Seja (x_1, y_1) um ponto dado de uma reta de coeficiente angular m.

Então, para qualquer outro ponto (x,y) da reta temos que $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Daí, multiplicando ambos os membros por $(x - x_1)$ obtemos a equação da reta na forma chamada **ponto-coeficiente angular**.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (1)$$

Se o ponto conhecido é aquele em que a reta corta o eixo y, e é denotado por (0, b), então a equação (1) torna-se

$$y = mx + b \qquad (2)$$

Neste caso, b chama-se **interseção y da reta** ou **coeficiente linear** e a equação (2) chama-se **equação reduzida da reta**.

Exemplo 3: Escreva a equação da reta que:

a) passa pelos pontos (4, – 2) e (5, 8).

b) passa por (2, – 3) e tem coeficiente angular – 4.

c) tem coeficiente angular 2 e coeficiente linear – 5.

d) passa pelos pontos (3, 5) e (3, –1)

Exemplo 4: Determine o coeficiente angular das retas abaixo:

a) $y = 3x - 6$ b) $\frac{y}{4} = x + 1$ c) $5y - 2x = 4$ d) $4x = -2y + 6$

Observações:

1 – Como uma reta horizontal tem coeficiente angular zero, a reta horizontal que passa pelo ponto (x_1, y_1) tem a equação $y = y_1$.

2 – O coeficiente angular de uma reta vertical não é definido, por isso as fórmulas (1) e (2) não são apropriadas para se obter sua equação. No entanto, como as primeiras coordenadas de todos os pontos de uma reta vertical são iguais, uma reta vertical que passa pelo ponto (x_1, y_1) tem equação $x = x_1$.

Teorema 1: Duas retas não-verticais são **paralelas** se e somente se seus coeficientes angulares são iguais, isto é,

$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

Exemplo 5: Seja r a reta que passa pelos pontos (– 2,9) e (1,3) e seja s a reta que passa pelos pontos (– 4, 10) e (3, – 4). Mostre que r e s são paralelas.

Teorema 2: Duas retas não-verticais são **perpendiculares** se e somente se o coeficiente angular de uma é igual ao simétrico do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja,

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r = \frac{-1}{m_s}$$

Exemplo 6: Seja r a reta que passa pelos pontos (2,9) e (–1,3) e seja s a reta que passa pelos pontos (4, – 5) e (– 2, – 2). Mostre que r e s são perpendiculares.

Observação: O coeficiente angular de uma reta é uma constante sempre que ele está definido. O número $y_2 - y_1$ é a variação na coordenada y e $x_2 - x_1$ é a variação na coordenada x. Dessa forma, o coeficiente angular de uma reta fornece a razão entre a variação de y e a variação de x, ou ainda, a **taxa de variação** de y em relação à x.

Soluções dos exemplos:

1) $m = \frac{-1-5}{3-(-2)} = \frac{-6}{5}$ 2) $m = \frac{1-1}{3-7} = \frac{0}{-4} = 0$

3) a) $y = 10x - 42$ b) $y = -4x + 5$ c) $y = 2x - 5$ d) $x = 3$

4) a) 3   b) 4   c) 2 / 5   d) – 2

5) $m_r = -2$ e $m_s = -2$. Logo $m_r = m_s$. Então r e s são paralelas.

6) $m_r = 2$ e $m_s = \frac{-1}{2}$. Logo $m_r = \frac{-1}{m_s}$. Então r e s são perpendiculares.

Revisão 4 – Função Exponencial e Função Logarítmica

1 – Função Exponencial

Definição: Seja b $\in$ $IR_+^* - \{1\}$. A função de IR em IR_+^* tal que f(x) = b^x é chamada de **função exponencial** de base b.

Exemplos:

1) Seja f(x) = 2^x.

Temos que f(3) = 2^3 = 8; f(0) = 2^0 = 1; f(–1) = 2^{-1} = $\frac{1}{2}$; $f\left(\frac{3}{2}\right)$ = $2^{3/2}$ = $\sqrt{2^3}$ = $\sqrt{8}$

2) Seja f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Temos que f(4) = $\frac{1}{16}$; f(–3) = 8; f(0) = 1; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Observação: Na definição anterior, b $\in IR_+^* - \{1\}$ pois:

a) Seja f(x) = $(–2)^x$. Então, por exemplo, f(1/2) = $(-2)^{½}$ = $\sqrt{-2} \notin$ IR

b) Seja f(x) = 0^x. Então, por exemplo, f(–2) = 0^{-2} = $\frac{1}{0} \notin$ IR

c) Seja f(x) = 1^x. Então f(x) = 1 para todo número real, isto é, f(x) é uma função constante.

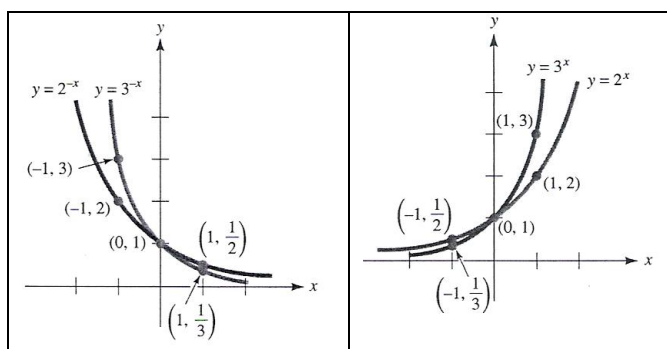
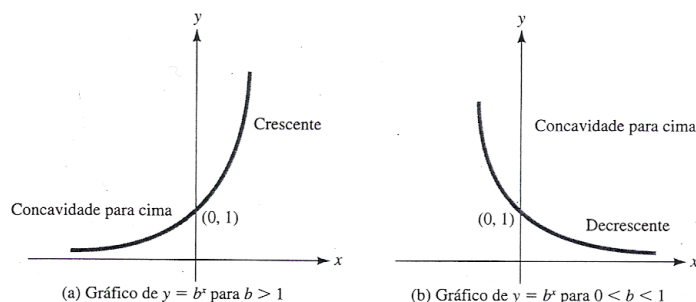



Figura 1

As quatro curvas da figura 1 são típicas dos gráficos de funções exponenciais. Em particular, se b > 1, o gráfico de y = b^x se parece com os gráficos de y = 2^x e y = 3^x; se 0 < b < 1, o gráfico de y = b^x se parece com os gráficos de y = $(1/2)^x$ = 2^{-x} e y = $(1/3)^x$ = 3^{-x}.

De modo geral, o gráfico de $y = b^x$ é representado por uma curva que está toda acima do eixo x, corta o eixo y no ponto (0,1) e tem concavidade voltada para cima em IR. Além disso, $y = b^x$ é crescente em IR para b > 1 e é decrescente em IR para 0 < b < 1.

(a) Gráfico de $y = b^x$ para $b > 1$ (b) Gráfico de $y = b^x$ para $0 < b < 1$

As funções exponenciais são contínuas em IR e obedecem às seguintes propriedades:

Sejam a, b $\in IR_+^* - \{1\}$ e x e y números reais.

a) $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$

b) $b^x . b^y = b^{x+y}$

c) $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

d) $(b^x)^y = b^{xy}$

e) $(a.b)^x = a^x . b^x$

f) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

2 – O número e

O número irracional 2,718281... é chamado de **número de Euler** e é denotado pela letra e.

3 – Logaritmo

Definição: Sejam a, b$\in IR_+^*$ com b ≠ 1. Dizemos que o **logaritmo** de a na base b é o número x tal que $b^x = a$, isto é:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Exemplos:

1) $\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$

2) $\log_3 81 = 4$ pois $3^4 = 81$

3) $\log_5 \dfrac{1}{125} = -3$ porque $5^{-3} = \dfrac{1}{125}$

Observações:

1) Os logaritmos de base 10 são chamados de **logaritmos decimais** e denotados sem indicar o valor da base, isto é, $\log a = \log_{10} a$.

2) Os logaritmos de base e são chamados de **logaritmos neperianos** (ou naturais) e denotados por ln isto é, ln a = $\log_e a$.

Propriedades dos logaritmos:

Sejam $b \in IR_+^* - \{1\}$ e sejam a, $c \in IR_+^*$

1) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$

2) $\log_b b = 1$

3) $\log_b 1 = 0$

4) $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$

5) $\log_b a^c = c.\log_b a$

6) $\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c$

4 – Função Logarítmica

Definição 3: Seja $b \in IR_+^* - \{1\}$. A função de IR_+^* em IR tal que f(x) = $\log_b x$ é chamada de **função logarítmica** de base b.

A figura abaixo mostra os gráficos de duas funções logarítmicas:

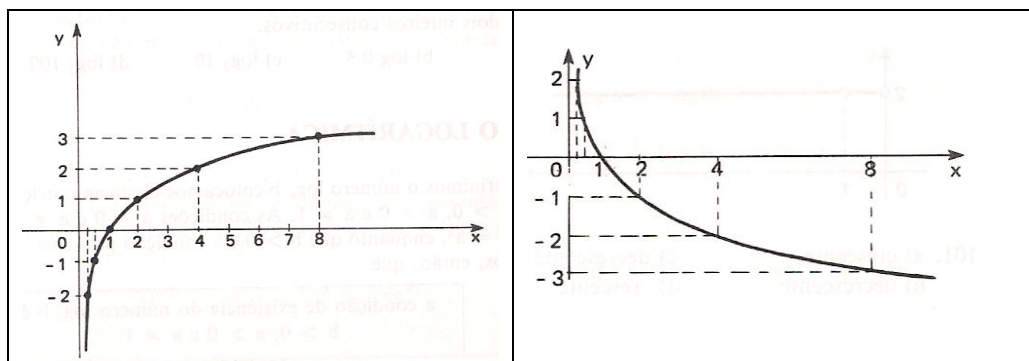



Gráfico de y = $\log_2 x$ Gráfico de y = $\log_{1/2} x$

Observações:

1) A função logarítmica é uma função contínua em IR_+^*.

2) A função logarítmica é crescente em IR_+^* para b > 1 e é decrescente em IR_+^* para 0 < b < 1

Propriedades que relacionam as funções exponencial e logarítmica como funções inversas:

1) $b^{\log_b x} = x$

2) $\log_b b^x = x$

Exercícios Complementares 1

Determine, se existirem, os limites abaixo:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 - x}{2x}$

2) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{2x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-1}{x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 6x+9}{x-3}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^3}{3x-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-x-2}$

8) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{5-x^2} - 2}$

9) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x^2-9x}{\sqrt{x} - 3}$

10) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$

12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$

13) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x^2 + 3x}$

15) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x+2}$

16) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5x+11}{\sqrt{x+1}}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5+4x^3 - x^2}{x^3 - 4x^2}$

18) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1} - 3}{x - 5}$

19) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9 - x^2}{-3+x}$

20) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{5x-4} - 1}{x^2 - 4}$

Respostas:

1) – 1 / 2	2) 0	3) 5 / 6	4) 1 / 5	5) 0
6) 0	7) 32 / 3	8) 2	9) 54	10) – 4
11) 1 / 3	12) 4	13) 6	14) – 1 / 6	15) 12
16) 13	17) 1 / 4	18) 1 / 3	19) – 6	20) 1 / 12

21) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x^3}$

22) $\lim_{x \to -\infty} \frac{9x^3 - x}{x^4 + 7}$

23) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + x}{1 - 7x - x^2}$

24) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x + 3}{2x - 7}$

25) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^6 + 2x}{x^9 + 7}$

26) $\lim_{x \to 1^-} \frac{3x^3 - 2x^2 - 4x + 1}{x + 1}$

27) $\lim_{x \to 1^-} \frac{3x^3 - 2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

28) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$

29) $\lim_{x \to -4^-} \frac{1 - x}{x + 4}$

30) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + x}{1 - 7x - 2x^3}$

31) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + 4x + 1}{x^2 + 4x}$

32) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3 + 2x + x^4}{x^5 + 6x}$

33) $\lim_{x \to -1^+} \frac{4x + 1}{x + 1}$

34) $\lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x - 1}$

35) $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^4 - x^2}{2x + x^2}$

36) $\lim_{x \to 0^-} \frac{x - 3}{x - x^2}$

37) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x + 3x^2}{x^2 + 1}$

38) $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x}$

39) $\lim_{x \to 0} \frac{5}{x^3 - x^2}$

40) $\lim_{x \to -2^+} \frac{1 - x}{x + 2}$

Respostas:

21) ∞	22) 0	23) $-\infty$	24) 5 / 2	25) 0
26) – 1	27) ∞	28) ∞	29) $-\infty$	30) – 2
31) $-\infty$	32) 0	33) $-\infty$	34) não existe	35) ∞
36) ∞	37) 3	38) $-\infty$	39) $-\infty$	40) ∞

Exercícios Complementares 2

Nas questões 1 a 28, calcule as derivadas, simplificando as respostas:

2) $f(x) = x^2 + x + 8$

2) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

3) $f(x) = \frac{4x^3}{3} - 4$

4) $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$

5) $f(x) = \frac{1}{7}(x^5 - 2x^3 + 4)$

6) $f(x) = \frac{x^5}{120}$

7) $f(x) = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

8) $f(x) = 3x^{-3} - x^{-1}$

9) $f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{5}{2x}$

10) $f(x) = \frac{8}{x^2 + x}$

11) $f(x) = 10x^2(5x + 1)^4$

12) $f(x) = (x - 1)^4(8x - 3)^2$

13) $f(x) = (3x + 1)^4(2x - 1)^5$

14) $f(x) = (2x + 5)^3(x + 1)^2$

15) $f(x) = \frac{2x + 5}{3x - 2}$

16) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

17) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

18) $f(x) = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$

19) $f(x) = \frac{x^3 + 7}{x}$

20) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 4}$

21) $f(x) = (x^2 + 1)^5$

22) $f(x) = (3x + 2)^{-4}$

23) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

24) $\sqrt[3]{3x + 5}$

25) $f(x) = \frac{1}{(2x + 3)^5}$

26) $f(x) = \frac{5}{(1 - x)^4}$

27) $f(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^3$

28) $f(x) = \left(\frac{4x}{x + 1}\right)^{-2}$

Respostas:

1) $2x + 1$

2) $15x^2 – 15x^4$

3) $4x^2$

4) $2x^3 – 3x – 1$

5) $\frac{1}{7}(5x^4 – 6x^2)$

6) $\frac{x^4}{24}$

7) $12x – 10 + 10x^{-3}$

8) $– 9x^{-4} + x^{-2}$

9) $\frac{-2}{3x^3} + \frac{5}{2x^2}$

10) $\frac{-8(2x+1)}{(x^2+x)^2}$

11) $20x(5x + 1)^3(15x + 1)$

12) $4(x – 1)^3(8x – 3)(12x – 7)$

13) $2(3x + 1)^3(2x – 1)^4(27x – 1)$

14) $2(2x + 5)^2(x + 1)(5x + 8)$

15) $\frac{-19}{(3x-2)^2}$

16) $\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}$

17) $\frac{1}{(x+2)^2}$

18) $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$

19) $\frac{2x^3-7}{x^2}$

20) $\frac{12x}{(x^2+4)^2}$

21) $10x(x^2 + 1)^4$

22) $– 12(3x + 2)^{-5}$

23) $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

24) $(3x + 5)^{-2/3}$

25) $\frac{-10}{(2x+3)^6}$

26) $\frac{20}{(1-x)^5}$

27) $\frac{6(x-1)^2}{(x+1)^4}$

28) $\frac{-(x+1)}{8x^3}$

Bibliografia

1 – Cálculo – Um Curso Moderno e suas Aplicações
Laurence D. Hoffmann e Gerald L. Bradley
Editora LTC

2 – Cálculo – Conceitos e Aplicações
Alex Himonas e Alan Howard
Editora LTC

3 – Cálculo – volume 1
Mustafa A. Munem e David J. Foulis
Editora LTC

4 – Cálculo com Geometria Analítica – volume 1
Earl W. Swokowski
Editora Makron Books Ltda